## अध्याय 1

SETS

� में *इन दिन का टकराव बीच में प्राचीन और आधुनिक अध्ययन करते हैं; वहाँ अवश्य निश्चित रूप से होना कुछ को होना कहा के लिए ए अध्ययन कौन किया नहीं*

*शुरू साथ पाइथागोरस और इच्छा नहीं अंत साथ आइंस्टाइन; लेकिन है सबसे पुराने और सबसे कम उम्र।*  *— जीएच साहसी* �

#### परिचय

सेट की अवधारणा एक मूलभूत भाग के रूप में कार्य करती है वर्तमान समय का गणित. आज इसी अवधारणा का प्रयोग किया जा रहा है गणित की लगभग हर शाखा में। सेट का उपयोग किया जाता है परिभाषित करना अवधारणाओं का रिश्ते और कार्य. अध्ययन का ज्यामिति, क्रम, संभावना, वगैरह। आवश्यक है ज्ञान का सेट.

का सिद्धांत सेट था द्वारा विकसित जर्मन गणितज्ञ जोर्ज कैंटोर (1845-1918)। वह पहला का सामना सेट जबकि कार्यरत पर "समस्या पर त्रिकोणमितीय

शृंखला"। में यह अध्याय, हम चर्चा करना कुछ बुनियादी परिभाषाएं

और परिचालन को शामिल सेट.

#### सेट और उनका अभ्यावेदन

जोर्ज कैंटर

(1845-1918)

में रोज रोज ज़िंदगी, हम अक्सर बोलना का संग्रह का वस्तुओं का ए विशिष्ट दयालु, ऐसा जैसा, ए सामान बाँधना का पत्ते, ए भीड़ का लोग, ए क्रिकेट टीम, वगैरह। में अंक शास्त्र भी, हम आना आर-पार संग्रह, के लिए उदाहरण, का प्राकृतिक संख्याएँ, अंक, मुख्य संख्याएँ, वगैरह। अधिक विशेष रूप से, हम परीक्षण करना अगले संग्रह:

* + 1. विषम प्राकृतिक नंबर कम बजाय 10, अर्थात, 1, 3, 5, 7, 9
    2. नदियों का भारत
    3. स्वर में अंग्रेज़ी वर्णमाला, अर्थात्, *ए, इ, मैं, ओ, यू*
    4. विभिन्न प्रकार का त्रिभुज
    5. मुख्य कारकों का 210, अर्थात्, 2,3,5 और 7
    6. समाधान का समीकरण: *एक्स* 2 – 5 *एक्स* + 6 = 0, अर्थात, 2 और 3.

हम टिप्पणी वह प्रत्येक का ऊपर उदाहरण है ए अच्छी तरह से परिभाषित संग्रह का वस्तुओं में

2 गणित

समझ वह हम कर सकना निश्चित रूप से तय करना चाहे ए दिया गया विशिष्ट वस्तु अंतर्गत आता है को ए दिया गया संग्रह या नहीं। के लिए उदाहरण, हम कर सकना कहना वह नदी नील करता है नहीं संबंधित को संग्रह का नदियों का भारत। पर अन्य हाथ, नदी गंगा करता है संबंधित को यह संग्रह.

हम देना नीचे ए कुछ अधिक उदाहरण का सेट इस्तेमाल किया गया विशेष रूप से में अंक शास्त्र, अर्थात.

एन : तय करना का सभी प्राकृतिक नंबर

जेड : तय करना का सभी पूर्णांकों

1. : तय करना का सभी तर्कसंगत नंबर
2. : तय करना का असली नंबर

जेड + : तय करना का सकारात्मक पूर्णांकों

क्यू + : तय करना का सकारात्मक तर्कसंगत संख्याएँ, और

आर + : तय करना का सकारात्मक असली नंबर.

ऊपर दिए गए विशेष सेटों के लिए प्रतीक होंगे भर में संदर्भित किया जाना चाहिए यह मूलपाठ।

फिर दुनिया के पांच सबसे प्रसिद्ध गणितज्ञों का संग्रह नहीं है अच्छी तरह से परिभाषित, क्योंकि मानदंड के लिए निर्धारण ए गणितज्ञ जैसा अधिकांश प्रसिद्ध मई अलग होना से व्यक्ति को व्यक्ति। इस प्रकार, यह है नहीं ए अच्छी तरह से परिभाषित संग्रह।

हम करेगा कहना वह *ए तय करना है ए अच्छी तरह से परिभाषित संग्रह का वस्तुएं.*

अगले अंक मई होना विख्यात :

* 1. वस्तुएँ, तत्वों और सदस्यों का ए तय करना हैं पर्याय शर्तें।
  2. सेट हैं आम तौर पर लक्षित द्वारा पूंजी पत्र ए, बी, सी, एक्स, हाँ, जेड, वगैरह।
  3. तत्वों का ए तय करना हैं का प्रतिनिधित्व किया द्वारा छोटा पत्र *ए, बी, सी, एक्स, हाँ, जेड,* वगैरह।

यदि *a* समुच्चय A का एक तत्व है, तो हम कहते हैं कि " *a,* A से संबंधित है" ग्रीक प्रतीक ∈ (एप्सिलॉन) है इस्तेमाल किया गया को निरूपित वाक्यांश ' *का है को* '। इस प्रकार, हम लिखना *ए* ∈ एक। अगर ' *बी* ' है नहीं एक तत्व का ए तय करना ए, हम लिखना *बी* ∉ ए और पढ़ना " *बी* करता है नहीं संबंधित को ए"।

इस प्रकार, में तय करना वी का स्वर में अंग्रेज़ी वर्णमाला, *ए* ∈ वी लेकिन *बी* ∉ वी में तय करना पी का मुख्य कारकों का 30, 3 ∈ पी लेकिन 15 ∉ पी।

वहाँ हैं दो तरीकों का का प्रतिनिधित्व ए तय करना :

1. रोस्टर या सारणीबद्ध प्रपत्र
2. सेट-निर्माता रूप।
3. में रोस्टर रूप, सभी तत्वों का ए तय करना हैं सूचीबद्ध, तत्वों हैं प्राणी अलग द्वारा अल्पविराम और हैं संलग्न करना अंदर ब्रेसिज़ { }. के लिए उदाहरण, तय करना का सभी यहां तक की सकारात्मक पूर्णांकों से कम 7 है बताया गया है में रोस्टर प्रपत्र जैसा {2, 4, 6}. कुछ अधिक उदाहरण एक सेट का प्रतिनिधित्व करने का रोस्टर फॉर्म नीचे दिया गया है :
   1. तय करना का सभी प्राकृतिक नंबर कौन विभाजित करना 42 है {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}.

सेट 3

�Note In roster form, the order in which the elements are listed is immaterial. Thus, the above set can also be represented as {1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42}.

* 1. के समुच्चय सभी स्वरों में अंग्रेजी की वर्णमाला है { *ए, ई, मैं, हे, तुम* }.
  2. तय करना का विषम प्राकृतिक नंबर प्रतिनिधित्व किया है द्वारा {1, 3, 5, . . .}. डॉट्स कहना हम वह सूची का विषम नंबर जारी रखना अनिश्चित काल तक.

generally repeated, i.e., all the elements are taken as distinct. For example, the set of letters forming the word ‘SCHOOL’ is { S, C, H, O, L} or {H, O, L, C, S}. Here, the order of listing elements has no relevance.

�Note It may be noted that while writing the set in roster form an element is not

1. सेट-बिल्डर रूप में, सेट के सभी तत्वों में एक ही सामान्य संपत्ति होती है कौन है नहीं अधीन द्वारा कोई तत्व बाहर तय करना। के लिए उदाहरण, में तय करना

{ *ए, इ, मैं, ओ, तुम* }, सभी तत्वों काबू करना ए सामान्य संपत्ति, अर्थात्, प्रत्येक का उन्हें है ए स्वर में अंग्रेज़ी वर्णमाला, और नहीं अन्य पत्र काबू करना यह संपत्ति। दर्शाने यह तय करना द्वारा वी, हम लिखना

वी = { *एक्स : एक्स* है ए स्वर में अंग्रेज़ी वर्णमाला}

*x* का उपयोग करके सेट के तत्व का वर्णन करते हैं(कोई अन्य प्रतीक पसंद पत्र *हाँ* , *z* , वगैरह। सकना होना इस्तेमाल किया गया) कौन है पालन किया द्वारा ए COLON “ : ”. कोलन के चिन्ह के बाद हम उसके पास मौजूद विशेषता गुण को लिखते हैं सेट के तत्व और फिर पूरे विवरण को ब्रेसिज़ के भीतर संलग्न करें। उपरोक्त विवरण का तय करना वी है पढ़ना जैसा “द तय करना का सभी *एक्स* ऐसा वह *एक्स* है ए स्वर का अंग्रेज़ी वर्णमाला"। में यह विवरण ब्रेसिज़ खड़ा होना के लिए “द तय करना का सभी", COLON खड़ा के लिए "ऐसा वह"। के लिए उदाहरण, तय करना

ए = { *एक्स : एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या और 3 < *एक्स* < 10} है पढ़ना जैसा “द तय करना का सभी *एक्स* ऐसा वह *x* एक प्राकृतिक संख्या है और *x* 3 और 10 के बीच है। अत: संख्याएँ 4, 5, 6, 7, 8 और 9 हैं तत्वों का तय करना एक।

*ए* ), ( *बी* ) और ( *सी )* में वर्णित सेटों को रोस्टर फॉर्म में ए, बी, द्वारा निरूपित करते हैं। सी, क्रमश, तब ए, बी, सी कर सकना भी होना का प्रतिनिधित्व किया में सेट-निर्माता रूप जैसा इस प्रकार है:

ए= { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या कौन विभाजित 42} B= { *y* : *y* अंग्रेजी वर्णमाला में एक स्वर है} सी= { *z* : *जेड* है एक विषम प्राकृतिक संख्या}

उदाहरण 1 लिखना समाधान तय करना का समीकरण *एक्स* 2+ \_ *एक्स –* 2 = 0 में रोस्टर रूप।

समाधान दिया गया समीकरण कर सकना होना लिखा हुआ जैसा

( *एक्स –* 1) ( *एक्स* + 2) = 0, मैं। इ।, *एक्स* = 1, – 2

इसलिए, समाधान तय करना का दिया गया समीकरण कर सकना होना लिखा हुआ में रोस्टर रूप जैसा {1, – 2}.

उदाहरण 2 लिखना तय करना { *एक्स* : *एक्स* है ए सकारात्मक पूर्णांक और *एक्स* 2 < 40} में रोस्टर रूप।

4 गणित

समाधान आवश्यक नंबर हैं 1, 2, 3, 4, 5, 6. इसलिए, दिया गया तय करना में रोस्टर रूप

है {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

उदाहरण 3 लिखना तय करना ए = {1, 4, 9, 16, 25, . . . }में सेट-निर्माता रूप।

समाधान हम मई लिखना सेट ए जैसा

ए = { *एक्स* : *एक्स* है वर्ग का एक प्राकृतिक संख्या} वैकल्पिक रूप से, हम कर सकना लिखना

ए = { *एक्स* : *एक्स* = *एन* 2 , कहाँ *एन* ∈ एन}

उदाहरण 4 लिखना तय करना { 1 2 *,* 3 *,* 4 *,* 5 *,* 6 } में सेट-निर्माता रूप।

2 3 4 5 6 7

समाधान हम देखते हैं कि दिए गए सेट में प्रत्येक सदस्य का अंश एक से कम है हर भी, मीटर शुरू से 1 और करना नहीं से अधिक 6. इस तरह, में सेट-निर्माता रूप दिया गया तय करना है

 *एक्स* *:* *एक्स*



*एन ,*

*एन* + 1

यहाँ \_ \_ *एन* है ए प्राकृतिक \_ \_ \_ \_ संख्या \_ \_ \_ \_ और \_ \_ 1 ≤ *एन* ≤ 6 \_

 



उदाहरण 5 मिलान प्रत्येक का तय करना पर बाएं बताया गया है में रोस्टर रूप साथ वही तय करना पर सही बताया गया है में सेट-निर्माता रूप :

1. {पी, आर, मैं, एन, सी, ए, एल} (ए) { *एक्स* : *एक्स* है ए सकारात्मक पूर्णांक और है ए भाजक का 18}
2. { 0 } (बी) { *एक्स* : *एक्स* है एक पूर्णांक और *एक्स* 2 – 9 = 0}
3. {1, 2, 3, 6, 9, 18} (सी) { *एक्स* : *एक्स* है एक पूर्णांक और *एक्स* + 1= 1}
4. {3, -3} (डी) { *एक्स* : *एक्स* है ए पत्र का शब्द प्रधानाचार्य}

समाधान तब से में (डी), वहाँ हैं 9 पत्र में शब्द प्रधानाचार्य और दो पत्र पी और मैं हैं दोहराया गया, इसलिए (मैं) माचिस (डी)। इसी प्रकार, (ii) माचिस (सी) जैसा *एक्स* + 1 = 1 तात्पर्य *एक्स* = 0. भी, 1, 2 ,3, 6, 9, 18 हैं सभी विभाजक का 18 और इसलिए (iii) माचिस (ए)। अंत में, *एक्स* 2 – 9 = 0 तात्पर्य *एक्स* = 3, -3 और इसलिए (iv) माचिस (बी)।

EXERCISE 1.1

1. कौन का अगले हैं सेट ? औचित्य आपका उत्तर।
   1. संग्रह का सभी महीने का ए वर्ष शुरुआत साथ पत्र जे।
   2. संग्रह का दस अधिकांश प्रतिभावान लेखकों के का भारत।
   3. ए टीम का ग्यारह best-cricket बल्लेबाजों का दुनिया।
   4. संग्रह का सभी लड़के में आपका कक्षा।
   5. संग्रह का सभी प्राकृतिक नंबर कम बजाय 100.
   6. ए संग्रह का उपन्यास लिखा हुआ द्वारा लेखक मुंशी प्रेम चांद.
   7. संग्रह का सभी यहां तक की पूर्णांक

सेट 5

* 1. संग्रह का प्रशन में यह अध्याय.
  2. ए संग्रह का अधिकांश खतरनाक जानवरों का दुनिया।

1. होने देना ए = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. डालना उपयुक्त प्रतीक ∈ या ∉ में खाली रिक्त स्थान:

(मैं) 5. . .ए (ii) 8 . . . और (iii) 0. . ।ए

(iv) 4. . . ए (वी) 2. . .ए (vi) 10. . ।ए

1. लिखना अगले सेट में रोस्टर रूप:
   1. ए = { *एक्स* : *एक्स* है एक पूर्णांक और -3 ≤ *एक्स* < 7}
   2. बी = { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या कम बजाय 6}
   3. सी = { *एक्स* : *एक्स* है ए दो अंकों प्राकृतिक संख्या ऐसा वह जोड़ का इसका अंक है 8}
   4. डी = { *एक्स* : *एक्स* है ए मुख्य संख्या कौन है भाजक का 60}
   5. इ = तय करना का सभी पत्र में शब्द त्रिकोणमिति
   6. एफ = तय करना के सभी पत्र में बेहतर शब्द
2. लिखना अगले सेट में सेट-निर्माता रूप :

(मैं) (3, 6, 9, 12} (ii) {2,4,8,16,32} (iii) {5, 25, 125, 625}

(iv) {2, 4, 6, . . .} (v) {1,4,9, . . .,100}

1. सूची सभी तत्वों का अगले सेट :
   1. ए = { *एक्स* : *एक्स* है एक विषम प्राकृतिक संख्या}

* 1. बी = { *एक्स* : *एक्स* है एक पूर्णांक,

1 9

2 < *एक्स* < 2 }

* 1. सी = { *एक्स* : *एक्स* है एक पूर्णांक, *एक्स* 2 ≤ 4}
  2. डी = { *एक्स* : *एक्स* है ए में पत्र शब्द "वफादार"}
  3. इ = { *एक्स* : *x* वर्ष का एक महीना है जिसमें 31 दिन नहीं होते हैं}
  4. एफ = { *एक्स* : *एक्स* एक है व्यंजन में अंग्रेजी की वर्णमाला कौन पछाड़ *क* }.

1. मिलान प्रत्येक का तय करना पर बाएं में रोस्टर रूप साथ वही तय करना पर सही बताया गया है में सेट-निर्माता रूप:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (मैं) | {1, 2, 3, 6} | (ए) | { *एक्स* : *एक्स* है ए मुख्य संख्या और ए भाजक का 6} |
| (ii) | {2, 3} | (बी) | { *एक्स* : *एक्स* है एक विषम प्राकृतिक संख्या कम बजाय 10} |
| (iii) | {एम,ए,टी,एच,ई,आई,सी,एस} | (सी) | { *एक्स* : *एक्स* है प्राकृतिक संख्या और भाजक का 6} |
| (iv) | {1, 3, 5, 7, 9} | (डी) | { *एक्स* : *एक्स* है एक पत्र का शब्द अंक शास्त्र}। |

#### खाली तय करना

विचार करना तय करना

ए = { *एक्स* : *एक्स* है ए विद्यार्थी का कक्षा ग्यारहवीं इस समय पढ़ना में ए विद्यालय }

हम कर सकना जाना को विद्यालय और गिनती करना संख्या का छात्र इस समय पढ़ना में कक्षा ग्यारहवीं में विद्यालय। इस प्रकार, तय करना ए रोकना ए परिमित संख्या का तत्व.

हम अब दूसरा सेट लिखें बी के रूप में इस प्रकार है:

6 गणित

बी = { *एक्स* : *एक्स* है ए विद्यार्थी इस समय पढ़ना में दोनों कक्षाओं एक्स और ग्यारहवीं }

हम निरीक्षण वह ए विद्यार्थी नही सकता अध्ययन इसके साथ ही में दोनों कक्षाओं एक्स और XI. इस प्रकार, सेट बी इसमें बिल्कुल भी कोई तत्व नहीं है।

परिभाषा 1 ए तय करना कौन करता है नहीं रोकना कोई तत्व है बुलाया *खाली तय करना* या

*व्यर्थ तय करना* या *खालीपन तय करना* ।

अनुसार को यह परिभाषा, बी है एक खाली तय करना जबकि ए है नहीं एक खाली सेट। खाली सेट है द्वारा दर्शाया गया है प्रतीक φ या { }.

हम देना नीचे ए कुछ उदाहरण का खाली सेट.

1. चलो ए = { *एक्स* : 1 < *एक्स* < 2, *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या}। तब ए है खाली तय करना, क्योंकि वहाँ है नहीं प्राकृतिक संख्या बीच में 1 और 2.
2. बी = { *एक्स* : *एक्स* 2 – 2 = 0 और *एक्स* है तर्कसंगत संख्या}। तब बी है खाली तय करना क्योंकि समीकरण *एक्स* 2 – 2 = 0 है नहीं संतुष्ट द्वारा कोई तर्कसंगत कीमत का *एक्स* ।
3. सी = { *एक्स* : *एक्स* है एक यहां तक की मुख्य संख्या ग्रेटर बजाय 2}.फिर सी है खाली तय करना, क्योंकि 2 है केवल यहां तक की मुख्य संख्या।
4. डी = { *एक्स* : *एक्स* 2 = 4, *एक्स* है विषम }. तब डी है खाली तय करना, क्योंकि समीकरण

*एक्स* 2 = 4 है नहीं संतुष्ट द्वारा कोई विषम कीमत का *एक्स* ।

#### सीमित और अनंत सेट

इंतज़ार \_ = {11, 2, 3, 4, 5}, बी = { *पूर्वाह्न, बी, सी, डी, इ, जी* }

और सी = { पुरुषों जीविका इस समय में अलग पार्ट्स का दुनिया}

हम निरीक्षण वह ए रोकना 5 तत्वों और बी रोकना 6 तत्व. कैसे अनेक तत्वों क्या C में शामिल है? वैसे भी, हम C में तत्वों की संख्या नहीं जानते हैं, लेकिन यह कुछ हैं प्राकृतिक संख्या जो काफी बड़ी संख्या हो सकती है। समुच्चय S के तत्वों की संख्या से, हम अर्थ संख्या का विशिष्ट तत्वों का तय करना और हम निरूपित यह द्वारा *एन* (एस)। अगर *एन* (एस) है ए प्राकृतिक संख्या, तब एस है *गैर खाली परिमित* तय करना।

विचार करना तय करना का प्राकृतिक नंबर. हम देखना वह संख्या का तत्वों का यह तय करना है नहीं परिमित तब से वहाँ हैं अनंत संख्या का प्राकृतिक नंबर. हम कहना वह तय करना प्राकृत संख्याओं का एक अनंत समुच्चय है। ऊपर दिए गए समुच्चय A, B और C परिमित समुच्चय हैं और *एन* (ए) = 5, *एन* (बी) = 6 और *एन* (सी) = कुछ परिमित संख्या।

परिभाषा 2 वह समुच्चय जो रिक्त है या जिसमें तत्वों की एक निश्चित संख्या है बुलाया *परिमित* अन्यथा, तय करना है बुलाया *अनंत* ।

विचार करना कुछ उदाहरण :

* + 1. होने देना डब्ल्यू होना तय करना का दिन का सप्ताह। तब डब्ल्यू है परिमित.
    2. होने देना एस होना तय करना का समाधान का समीकरण *एक्स* 2 -16= 0. फिर एस है परिमित.
    3. होने देना जी होना तय करना का अंक पर ए रेखा। तब जी है अनंत।

जब हम किसी समुच्चय को रोस्टर के रूप में प्रस्तुत करते हैं तो हम समुच्चय के सभी तत्वों को लिखते हैं ब्रेसिज़ के भीतर { }. किसी अनंत समुच्चय के सभी तत्वों को लिखना संभव नहीं है ब्रेसिज़ { } क्योंकि नंबर का तत्वों का ऐसा ए तय करना है नहीं परिमित. इसलिए, हम प्रतिनिधित्व करना

सेट 7

कुछ अनंत तय करना में रोस्टर रूप द्वारा लिखना ए कुछ तत्वों कौन स्पष्ट रूप से संकेत देना संरचना का तय करना पालन किया ( या पहले ) द्वारा तीन बिंदु.

के लिए उदाहरण, {1, 2, 3 . . .} है तय करना का प्राकृतिक संख्याएँ, {1, 3, 5, 7, . . .} है तय करना का विषम प्राकृतिक संख्याएँ, {. . .,–3, -2, -1, 0,1, 2 ,3, . . .} है तय करना का पूर्णांक सभी इन सेट हैं अनंत।

set of real numbers cannot be described in this form, because the elements of this set do not follow any particular pattern.

�Note All infinite sets cannot be described in the roster form. For example, the

उदाहरण 6 बताएं कि निम्नलिखित में से कौन सा सेट परिमित या अनंत है: (i) { *एक्स* : *एक्स* ∈ एन और ( *एक्स* – 1) ( *एक्स* –2) = 0}

* + - 1. { *एक्स* : *एक्स* ∈ एन और *एक्स* 2 = 4}
      2. { *एक्स* : *एक्स* ∈ एन और 2 *एक्स* -1 = 0}
      3. { *एक्स* : *एक्स* ∈ एन और *एक्स* है मुख्य}
      4. { *एक्स* : *एक्स* ∈ एन और *एक्स* है विषम}

समाधान (i) दिया गया है तय करना = {1, 2}. इस तरह, यह है परिमित.

1. दिया गया तय करना = {2}. इस तरह, यह है परिमित.
2. दिया गया तय करना = φ . इस तरह, यह है परिमित.
3. दिया गया तय करना है तय करना का सभी मुख्य नंबर और तब से तय करना का मुख्य नंबर है अनंत। इस तरह दिया गया तय करना है अनंत
4. तब से वहाँ हैं अनंत संख्या का विषम संख्याएँ, इस तरह, दिया गया तय करना है अनंत।

#### बराबर सेट

दो समुच्चय A और B दिए गए हैं, यदि A का प्रत्येक अवयव भी B का एक अवयव है और यदि प्रत्येक B का अवयव भी A का एक अवयव है, तो समुच्चय A और B बराबर कहलाते हैं। स्पष्ट रूप से, दो सेट पास होना बिल्कुल वही तत्व.

परिभाषा 3 दो समुच्चय A और B *समान* कहलाते हैं यदि वे बिल्कुल समान हों तत्वों और हम लिखना ए = बी। अन्यथा, सेट हैं कहा को होना *असमान* और हम लिखना ए ≠ बी।

हम विचार करना अगले उदाहरण :

(मैं) होने देना ए = {1, 2, 3, 4} और बी = {3, 1, 4, 2}। तब ए = बी.

(ii) होने देना ए होना तय करना का मुख्य नंबर कम बजाय 6 और पी तय करना का मुख्य कारकों का 30. तब ए और पी हैं बराबर, तब से 2, 3 और 5 हैं केवल मुख्य कारकों का 30 और भी इन हैं कम बजाय 6.

नोट एक सेट करता है नहीं परिवर्तन अगर एक या अधिक तत्वों का तय करना हैं दोहराया गया।

For example, the sets A = {1, 2, 3} and B = {2, 2, 1, 3, 3} are equal, since each

8 गणित

element of A is in B and vice-versa. That is why we generally do not repeat any

element in describing a set.

उदाहरण 7 खोजो जोड़े का बराबर सेट, अगर कोई भी, देना कारण: ए = {0}, बी = { *एक्स* : *एक्स* > 15 और *एक्स* < 5},

सी = { *एक्स* : *एक्स* – 5 = 0 }, डी = { *एक्स* : *एक्स* 2 = 25},

ई = { *एक्स* : *x* समीकरण का एक अभिन्न धनात्मक मूल है *एक्स* 2 – 2 *एक्स* -15 = 0}.

समाधान तब से 0 ∈ ए और 0 करता है नहीं संबंधित को कोई का सेट बी, सी, डी और इ, यह इस प्रकार वह, ए ≠ बी, ए ≠ सी, ए ≠ डी, ए ≠ इ।

तब से बी = φ लेकिन कोई नहीं का अन्य सेट हैं खाली। इसलिए बी ≠ सी, बी ≠ डी और बी ≠ इ। भी सी = {5} लेकिन -5 ∈ डी, इस तरह सी ≠ डी।

तब से इ = {5}, सी = इ। आगे, डी = {–5, 5} और इ = {5}, हम खोजो वह, डी ≠ इ।

इस प्रकार, केवल जोड़ा का बराबर सेट है सी और इ।

उदाहरण 8 कौन का अगले जोड़े का सेट हैं बराबर? औचित्य आपका उत्तर।

1. एक्स, द तय करना का पत्र में "मिश्र धातु" और बी, तय करना का पत्र में "वफादार"।
2. ए = { *एन* : *एन* ∈ जेड और *एन* 2 ≤ 4} और बी = { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर और *एक्स* 2 – 3 *एक्स* + 2 = 0}. समाधान (मैं) हम पास होना, एक्स = {ए, एल, एल, हे, वाई}, बी = {एल, हे, हाँ, ए, एल}. तब एक्स और बी हैं बराबर सेट जैसा दुहराव का तत्वों में ए तय करना करना नहीं परिवर्तन ए तय करना। इस प्रकार,

एक्स = {ए, एल, ओ, य} = बी

(ii) ए = {–2, -1, 0, 1, 2}, बी = {1, 2}. तब से 0 ∈ ए और 0 ∉ बी, ए और बी हैं नहीं बराबर सेट.

EXERCISE 1.2

1. कौन का अगले हैं उदाहरण का व्यर्थ तय करना
   1. तय करना का विषम प्राकृतिक नंबर भाज्य द्वारा 2
   2. तय करना का भी प्रमुख संख्या
   3. { *एक्स : एक्स* है ए प्राकृतिक संख्याएँ, *एक्स* < 5 और *एक्स* > 7 }
   4. { *य : य* है ए बिंदु सामान्य को कोई दो समानांतर पंक्तियाँ}
2. कौन का अगले सेट हैं परिमित या अनंत
   1. तय करना का महीने का ए वर्ष (ii) {1, 2, 3, . . .}

(iii) {1, 2, 3, . . .99, 100}

1. धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय 100 से अधिक
2. से कम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय 99
3. राज्य चाहे प्रत्येक का अगले तय करना है परिमित या अनंत:
   1. तय करना का पंक्तियां कौन हैं समानांतर को *एक्स* -अक्ष
   2. तय करना का पत्र में अंग्रेज़ी वर्णमाला
   3. तय करना का नंबर कौन हैं एकाधिक का 5

सेट 9

* 1. तय करना का जानवरों जीविका पर धरती
  2. तय करना का मंडलियां पासिंग के माध्यम से मूल (0,0)

1. में अगले, राज्य चाहे ए = बी या नहीं:
   1. वह = { *ए* , *बी* , *सी , सी* , *डी* } बी = { *डी* , *सी , सी* , *बकरी* \_ *\_* } } (ii) वह = { 4, 8, 12, 16 } बी = { 8, 4, 16, 18}

(iii) ए = {2, 4, 6, 8, 10} बी = { *एक्स* : *एक्स* है सकारात्मक यहां तक की पूर्णांक और *एक्स* ≤ 10} (iv) ए = { *एक्स* : *एक्स* है ए एकाधिक का 10}, बी = { 10, 15, 20, 25, 30, . . . }

1. हैं अगले जोड़ा का सेट बराबर ? देना कारण.
   1. ए = {2, 3}, बी = { *एक्स* : *एक्स* है समाधान का *एक्स* 2 + 5 *एक्स* + 6 = 0}
   2. ए = { *एक्स* : *एक्स* है ए पत्र में शब्द अनुसरण करना} बी = { *य* : *य* है ए पत्र में शब्द भेड़िया}
2. से सेट दिया गया नीचे, चुनना बराबर सेट :

ए = { 2, 4, 8, 12}, बी = { 1, 2, 3, 4}, सी = { 4, 8, 12, 14}, डी = { 3, 1, 4, 2}

इ = {–1, 1}, एफ = { 0, *ए* }, जी = {1, -1}, एच = { 0, 1 }

#### सबसेट

विचार करना सेट : एक्स = तय करना का सभी छात्र में आपका विद्यालय, वाई = तय करना का सभी छात्र में आपका कक्षा।

हम टिप्पणी वह प्रत्येक तत्व का वाई है भी एक तत्व का एक्स; हम कहना वह वाई है ए सबसेट X का। यह तथ्य कि Y, X का सबसेट है, Y ⊂ X के रूप में प्रतीकों में व्यक्त किया गया है। प्रतीक ⊂ खड़ा के लिए 'है ए सबसेट का' या 'में निहित है'.

परिभाषा 4 एक समुच्चय A को समुच्चय B का उपसमुच्चय कहा जाता है यदि A का प्रत्येक अवयव भी एक हो तत्व का बी।

में अन्य शब्द, ए ⊂ बी अगर जब कभी भी *ए* ∈ ए, तब *ए* ∈ बी। यह है अक्सर सुविधाजनक को उपयोग प्रतीक “ ⇒ ” कौन मतलब *तात्पर्य* । का उपयोग करते हुए यह प्रतीक, हम कर सकना लिखना निश्चित का *सबसेट* जैसा इस प्रकार है:

ए ⊂ बी अगर *ए* ∈ ए ⇒ *ए* ∈ बी

हम उपरोक्त कथन को इस प्रकार पढ़ते हैं " *यदि A, A का एक तत्व है तो A, B का एक उपसमुच्चय है तात्पर्य वह ए है भी एक तत्व का बी* "। अगर ए है नहीं ए सबसेट का बी, हम लिखना ए ⊄ बी।

हम मई टिप्पणी वह के लिए ए को होना ए सबसेट का बी, सभी वह है आवश्यकता है है वह प्रत्येक

तत्व का ए है में बी। यह है संभव वह प्रत्येक तत्व का बी मई या मई नहीं होना में एक। अगर यह इसलिए ह ाेती है वह प्रत्येक तत्व का बी है भी में ए, तब हम करेगा भी पास होना बी ⊂ एक। में यह मामले में, A और B समान सेट हैं इसलिए हमारे पास A ⊂ है बी और बी ⊂ ए ⇔ ए = बी, जहां " ⇔ " दोतरफा निहितार्थों का प्रतीक है, और आमतौर पर इसे *केवल और केवल यदि* (संक्षेप में) के रूप में पढ़ा जाता है लिखा हुआ जैसा "आईएफएफ")

यह इस प्रकार से ऊपर परिभाषा वह प्रत्येक तय करना *ए है ए सबसेट का अपने आप,* अर्थात, ए ⊂ ए. चूंकि खाली सेट φ में कोई तत्व नहीं है, हम यह कहने के लिए सहमत हैं कि φ *का एक उपसमुच्चय है प्रत्येक तय करना* । हम अब विचार करना कुछ उदाहरण :

10 गणित

1. सेट क्यू का तर्कसंगत नंबर है ए सबसेट का तय करना का आर असली सुन्न, और हम लिखना क्यू ⊂ आर.
2. अगर ए है तय करना का सभी विभाजक का 56 और बी तय करना का सभी मुख्य विभाजक का 56, तब बी है ए सबसेट का ए और हम लिखना बी ⊂ एक।
3. होने देना ए = {1, 3, 5} और बी = { *एक्स : एक्स* है एक विषम प्राकृतिक संख्या कम बजाय 6}. तब ए ⊂ बी और बी ⊂ ए और इस तरह ए = बी।
4. होने देना ए = { *ए, इ, मैं, ओ, तुम* } और बी = { *ए, बी, सी, डी* }। तब ए है नहीं ए सबसेट का बी,

भी बी है नहीं ए सबसेट का एक।

होने देना ए और बी होना दो सेट. अगर ए ⊂ बी और ए ≠ बी , तब ए है बुलाया ए *उचित सबसेट का* बी और बी है बुलाया *सुपरसेट* का एक। के लिए उदाहरण,

ए = {1, 2, 3} है ए उचित सबसेट का बी = {1, 2, 3, 4}.

अगर ए तय करना ए है केवल एक तत्व, हम पुकारना यह ए *एकाकी वस्तु तय करना* । इस प्रकार,{ *ए* } है ए एकाकी वस्तु तय करना।

उदाहरण 9 विचार करना सेट

फी , ए = { 1, 3 }, बी = {1, 5, 9}, सी = {1, 3, 5, 7, 9}.

डालना प्रतीक ⊂ या ⊄ बीच में प्रत्येक का अगले जोड़ा का सेट:

(मैं) φ . . . . . . . . . . . . बी (ii) ए . . . . . . . . . . . . बी (iii) ए . . . . . . . . . . . . सी (iv) बी . . . . . . . . . . . . सी

समाधान (i) φ ⊂ बी φ के रूप में एक है सबसेट हरेक का तय करना।

* 1. ए ⊄ बी जैसा 3 ∈ ए और 3 ∉ बी
  2. ए ⊂ सी जैसा 1, 3 ∈ ए भी अंतर्गत आता है को सी
  3. बी ⊂ सी जैसा प्रत्येक तत्व का बी है भी एक तत्व का सी।

उदाहरण 10 होने देना ए = { *ए, इ, मैं, ओ, तुम* } और बी = { *ए, बी, सी, डी* }। है ए ए सबसेट का बी ? नहीं। (क्यों?)। है बी ए सबसेट का ए? नहीं। (क्यों?)

उदाहरण 11 होने देना ए, बी और सी होना तीन सेट. अगर ए ∈ बी और बी ⊂ सी, है यह सत्य वह ए ⊂ सी?। अगर मत दो एक उदाहरण।

समाधान नहीं। होने देना ए = {1}, बी = {{1}, 2} और सी = {{1}, 2, 3}. यहाँ ए ∈ बी जैसा ए = {1} और बी ⊂ सी. लेकिन ए ⊄ सी जैसा 1 ∈ ए और 1 ∉ सी।

टिप्पणी वह एक तत्व का ए तय करना कर सकना कभी नहीं होना ए सबसेट का अपने आप।

* + 1. *सबसेट का तय करना का असली नंबर*

जैसा विख्यात में अनुभाग 1.6, वहाँ हैं अनेक महत्वपूर्ण सबसेट का आर। हम देना नीचे नाम का कुछ का इन उपसमुच्चय

तय करना का प्राकृतिक नंबर एन = {1, 2, 3, 4, 5, . . .}

तय करना का पूर्णांक Z = {. . ., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .}

*पी*

तय करना का तर्कसंगत नंबर क्यू = { *एक्स* : *एक्स = क्यू* , *पी, क्यू* ∈ जेड और *क्यू* ≠ 0}

सेट 11

कौन है पढ़ना “ क्यू है तय करना का सभी नंबर *एक्स* ऐसा वह *एक्स* के बराबर होती है भागफल

*पी*

*क्यू* , कहाँ

*पी* और *क्यू* हैं पूर्णांकों और *क्यू* है नहीं शून्य"। सदस्यों का क्यू शामिल करना -5 (कौन कर सकना होना

5

व्यक्त जैसा ) ,

5 , 3 1

7

(कौन कर सकना होना व्यक्त जैसा ) और

*–* 11 .

1 7 2 2 3

तय करना का तर्कहीन संख्याएँ, लक्षित द्वारा टी, है शांत का सभी अन्य असली नंबर. इस प्रकार टी = { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर और *एक्स* ∉ क्यू}, अर्थात, सभी असली नंबर वह हैं नहीं तर्कसंगत।

सदस्यों का टी में शामिल हैं , और .



2



5

कुछ का ज़ाहिर रिश्ते के बीच इन सबसेट हैं:

एन ⊂ जेड ⊂ क्यू, क्यू ⊂ आर, टी ⊂ आर, एन ⊄ टी।

* + 1. *R के उपसमुच्चय के रूप में अंतराल* होने देना *ए, बी* ∈ आर और *ए < बी।* फिर सेट का वास्तविक संख्या

{ *य : ए < य < बी* } है बुलाया एक *खुला मध्यान्तर* और है लक्षित द्वारा ( *ए* , *बी* ) *।* सभी अंक

बीच में *ए* और *बी* संबंधित को खुला मध्यान्तर ( *ए, बी* ) लेकिन *ए, बी* खुद करना नहीं संबंधित को यह मध्यान्तर।

मध्यान्तर कौन रोकना अंत अंक भी है बुलाया *बंद किया हुआ मध्यान्तर* और है लक्षित द्वारा [ *ए, बी* ]. इस प्रकार

[ *ए, बी* ] = { *एक्स* : *ए* ≤ *एक्स* ≤ *बी* }

हम अंतराल भी हो सकते हैं बंद किया हुआ पर एक छोर पर खुला अन्य, यानी,

[ *ए, बी* ) = { *एक्स : ए* ≤ *एक्स* < *बी* } है एक *खुला मध्यान्तर* से *ए* को *बी,* शामिल *ए* लेकिन के सिवा *बी।*

( *ए, बी* ] = { *एक्स* : *ए* < *एक्स* ≤ *बी* } है एक *खुला मध्यान्तर* से *ए* को *बी* शामिल *बी* लेकिन के सिवा *एक।*

ये नोटेशन सेट के सबसेट को नामित करने का एक वैकल्पिक तरीका प्रदान करते हैं वास्तविक संख्या। उदाहरण के लिए, यदि ए = (-3, 5) और बी = [-7, 9], तो ए ⊂ बी। सेट [0, ∞ ) गैर-ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को परिभाषित करता है, जबकि समुच्चय (- ∞ , 0 ) के समुच्चय को परिभाषित करता है नकारात्मक असली नंबर. तय करना ( – ∞ , ∞ ) का वर्णन करता है तय करना का असली नंबर में रिश्ता को ए रेखा का विस्तार से – ∞ को ∞ .

पर असली संख्या रेखा, विभिन्न प्रकार का अंतराल बताया गया है ऊपर जैसा सबसेट का आर, हैं दिखाया में अंजीर 1.1.





अंजीर 1.1

यहाँ, हम टिप्पणी वह एक मध्यान्तर रोकना असीम अनेक अंक.

उदाहरण के लिए, सेट-बिल्डर फॉर्म में लिखा गया सेट { *x* : *x* ∈ R, -5 < *x* ≤ 7}, हो सकता है लिखा हुआ में रूप का मध्यान्तर जैसा (-5, 7] और मध्यान्तर [–3, 5) कर सकना होना लिखा हुआ में तय करना- बिल्डर फॉर्म जैसा कि { *एक्स* : –3 ≤ *एक्स* <5}.

12 गणित

संख्या ( *बी – ए* ) है बुलाया *लंबाई का कोई का अंतराल* ( *ए, बी* ), [ *ए, बी* ], [ *ए, बी* ) या ( *ए, बी* ] *।*

#### सार्वभौमिक तय करना

आमतौर पर, किसी विशेष संदर्भ में, हमें a के तत्वों और उपसमुच्चय से निपटना पड़ता है बुनियादी तय करना कौन है उपयुक्त को वह विशिष्ट प्रसंग। के लिए उदाहरण, जबकि पढ़ना प्रणाली का संख्याएँ, हम हैं इच्छुक में तय करना का प्राकृतिक नंबर और इसका सबसेट ऐसा जैसा तय करना का सभी मुख्य संख्याएँ, तय करना का सभी यहां तक की संख्याएँ, और इसलिए आगे. यह बुनियादी तय करना " *यूनिवर्सल सेट* " कहा जाता है। सार्वत्रिक समुच्चय को आमतौर पर यू और उसके सभी द्वारा दर्शाया जाता है सबसेट द्वारा पत्र ए, बी, सी, वगैरह।

के लिए उदाहरण, के लिए तय करना का सभी पूर्णांक, सार्वभौमिक तय करना कर सकना होना तय करना का तर्कसंगत नंबर या, के लिए वह मामला, तय करना आर का असली नंबर. के लिए एक और उदाहरण, में इंसान जनसंख्या अध्ययन करते हैं, सार्वभौमिक तय करना बना होना का सभी लोग में दुनिया।

EXERCISE 1.3

1. बनाना सही कथन द्वारा भरने में प्रतीक ⊂ या ⊄ में खाली खाली स्थान : (मैं) { 2, 3, 4 } . . . { 1, 2, 3, 4,5 } (ii) { *ए* , *बी* , *सी* } . . . { *बी* , *सी* , *डी* }
2. { *एक्स* : *एक्स* है ए विद्यार्थी का कक्षा ग्यारहवीं का आपका विद्यालय}। . ।{ *एक्स* : *एक्स* विद्यार्थी का आपका विद्यालय}
3. { *एक्स* : *एक्स* एक है घेरा प्लेन में} । . ।{ *एक्स* : *एक्स* है एक चक्र में वही विमान साथ

त्रिज्या 1 इकाई}

1. { *एक्स* : *एक्स* एक त्रिकोण है वायुयान में} . . . { *एक्स* : *एक्स* एक आयत है में विमान}
2. { *एक्स* : *एक्स* है एक समभुज त्रिकोण में ए विमान} . . . { *एक्स* : *एक्स* है ए त्रिकोण में वही विमान}
3. { *एक्स* : *एक्स* है एक यहां तक की प्राकृतिक संख्या} . . . { *एक्स* : *एक्स* है एक पूर्णांक}
4. परीक्षण करना चाहे अगले कथन हैं सत्य या असत्य:

(मैं) { *ए* , *बी* } ⊄ { *बी* , *सी, ए* }

(ii) { *ए* , *इ* } ⊂ { *एक्स* : *एक्स* है ए स्वर में अंग्रेज़ी वर्णमाला} (iii) { 1, 2, 3 } ⊂ { 1, 3 *,* 5 }

(iv) { *ए* } ⊂ { *और* , *बी, सी* }

(में) { *ए* } ∈ { *और* , *बी, सी* }

(vi) { *एक्स* : *एक्स* है एक यहां तक की प्राकृतिक संख्या कम बजाय 6} ⊂ { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या कौन विभाजित 36}

1. होने देना ए = { 1, 2, { 3, 4 }, 5 }. कौन का अगले कथन हैं गलत और क्यों? (मैं) {3, 4} ⊂ ए (ii) {3, 4} ∈ ए (iii) {{3, 4}} ⊂ ए

(iv) 1 ∈ ए (वी) 1 ⊂ ए (vi) {1, 2, 5} ⊂ ए

(vii) {1, 2, 5} ∈ ए (viii) {1, 2, 3} ⊂ ए (ix) पीएचआई ∈ ए

(एक्स) पीएचआई ⊂ ए (xi) { φ } ए

1. लिखना नीचे सभी सबसेट का अगले सेट

(मैं) { *ए* } (ii) { *ए* , *बी* } (iii) {1, 2, 3} (iv) φ

सेट 13

1. लिखना अगले जैसा अंतराल :

(i) { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर, – 4 *< एक्स* ≤ 6} (ii) { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर, – 12 *< एक्स* < -10}

(iii) { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर, 0 ≤ *एक्स < 7* } (iv) { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर, 3 ≤ *एक्स* ≤ 4}

1. लिखना अगले अंतराल में सेट-निर्माता रूप :

(मैं) (- 3, 0) (ii) [6 , 12] (iii) (6, 12] (iv) [–23, 5)

1. क्या सार्वभौमिक सेट चाहेंगे आप का प्रस्ताव के लिए प्रत्येक का अगले :
   1. तय करना का सही त्रिभुज। (ii) तय करना का समद्विबाहु त्रिभुज।

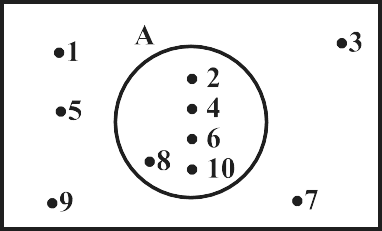
8. सेट A = {1, 3, 5}, B = {2, 4, 6} और C = {0, 2, 4, 6, 8} दिया गया है, इनमें से कौन सा निम्नलिखित को तीनों समुच्चयों A, B और C के लिए सार्वभौमिक समुच्चय माना जा सकता है (मैं) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

* 1. φ

(iii) {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

(iv) {1,2,3,4,5,6,7,8}

#### वेन चित्र

अधिकांश का रिश्तों बीच में सेट कर सकना होना का प्रतिनिधित्व किया द्वारा मतलब का चित्र कौन हैं ज्ञात *वेन आरेख* के रूप में । वेन आरेखों का नाम किसके नाम पर रखा गया है? अंग्रेज़ी तर्कशास्त्री, जॉन वेन (1834-1883) इन आरेख में आयतें और शामिल हैं बंद वक्र आमतौर पर वृत्त. सार्वभौम समुच्चय का प्रतिनिधित्व किया गया है आम तौर पर द्वारा ए आयत और इसका सबसेट द्वारा वृत्त.

में वेन आरेख, तत्वों का सेट हैं

लिखा हुआ में उनका संबंधित मंडलियां (अंजीर 1.2 और 1.3)

चित्रण 1 चित्र 1.2 में, यू = {1,2,3, ..., 10} है सार्वभौमिक तय करना का कौन

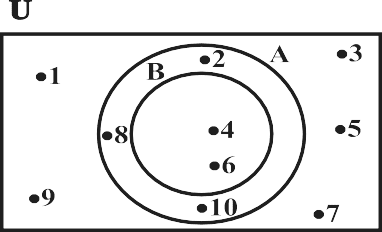
ए = {2,4,6,8,10} है ए सबसेट।

चित्रण 2 चित्र 1.3 में, यू = {1,2,3, ..., 10} है सार्वभौमिक तय करना का कौन

ए = {2,4,6,8,10} और बी = {4, 6} हैं उपसमुच्चय, और भी बी ⊂ एक।

पाठक इच्छा देखना एक व्यापक उपयोग का

अंजीर 1.2



अंजीर 1.3

वेन चित्र कब हम चर्चा करना संघ, चौराहा और अंतर का सेट.

#### संचालन पर सेट

में पहले कक्षाएं, हम पास होना सीखा कैसे को अभिनय करना परिचालन का जोड़ना, घटाव, गुणा और विभाजन पर नंबर. प्रत्येक एक का इन परिचालन था प्रदर्शन किया एक अन्य संख्या प्राप्त करने के लिए संख्याओं की एक जोड़ी पर। उदाहरण के लिए, जब हम प्रदर्शन करते हैं संख्या 5 और 13 की जोड़ी पर योग की क्रिया से हमें संख्या 18 प्राप्त होती है। प्रदर्शन संचालन का गुणा पर जोड़ा का नंबर 5 और 13, हम पाना 65.

14 गणित

इसी तरह, कुछ ऑपरेशन ऐसे होते हैं जिन्हें दो सेटों पर करने पर परिणाम मिलते हैं एक और तय करना। हम इच्छा अब परिभाषित करना निश्चित परिचालन पर सेट और परीक्षण करना उनका गुण। अब से, हम इच्छा संदर्भ देना सभी हमारा सेट जैसा सबसेट का कुछ सार्वभौमिक तय करना।

* + 1. *समुच्चयों का संघ* माना A और B कोई दो समुच्चय हैं। का संघ A और B समुच्चय है कौन बना होना का सभी तत्वों का ए और सभी तत्वों का बी, सामान्य तत्वों

केवल एक बार लिया जा रहा है। ' ∪ ' चिन्ह का प्रयोग *मिलन को* दर्शाने के लिए किया जाता है । *प्रतीकात्मक रूप से, हम लिखना* ए ∪ बी *और आम तौर पर पढ़ना जैसा 'ए मिलन बी'* ।

उदाहरण 12 होने देना ए = { 2, 4, 6, 8} और बी = { 6, 8, 10, 12}. खोजो ए ∪ बी।

समाधान हम पास होना ए ∪ बी = { 2, 4, 6, 8, 10, 12}

टिप्पणी वह सामान्य तत्वों 6 और 8 पास होना गया लिया केवल एक बार जबकि लिखना ए ∪ बी।

उदाहरण 13 होने देना ए = { *ए, इ, मैं, ओ, यू* } और बी = { *ए, मैं, यू* }. दिखाओ वह ए ∪ बी = ए

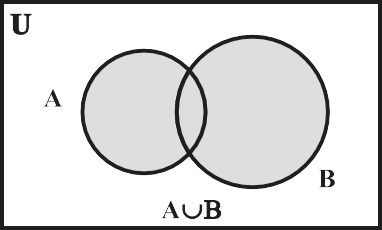
समाधान हम पास होना, ए ∪ बी = { *ए, इ, मैं, ओ, यू* } = एक।

यह उदाहरण चित्रण करता है वह मिलन का सेट ए और इसका सबसेट बी है तय करना ए अपने आप, अर्थात, अगर बी ⊂ ए, तब ए ∪ बी = एक।

उदाहरण 14 होने देना एक्स = {टक्कर मारना, गीता, अकबर} होना तय करना का छात्र का कक्षा XI, कौन हैं स्कूल हॉकी टीम में. मान लीजिए Y = {गीता, डेविड, अशोक} से छात्रों का समूह है कक्षा ग्यारहवीं कौन हैं में विद्यालय फ़ुटबॉल टीम। खोजो एक्स ∪ वाई और व्याख्या तय करना।

हल हमारे पास, X ∪ Y = {राम, गीता, अकबर, डेविड, अशोक} है। यह का सेट है छात्र कक्षा से XI जो हैं में हॉकी टीम या फ़ुटबॉल टीम या दोनों.

इस प्रकार, हम कर सकना परिभाषित करना मिलन का दो सेट जैसा इस प्रकार है:

परिभाषा 5 मिलन का दो सेट ए और बी है तय करना सी कौन बना होना का सभी वे तत्वों कौन हैं दोनों में से एक में ए या में बी (शामिल

वे कौन हैं में दोनों)। में प्रतीक, हम लिखना। ए ∪ बी = { *एक्स* : *एक्स* ∈ ए या *एक्स* ∈ बी }

मिलन का दो सेट कर सकना होना का प्रतिनिधित्व किया द्वारा

ए वेन आरेख जैसा दिखाया में अंजीर 1.4.

छायांकित हिस्से में अंजीर 1.4 का प्रतिनिधित्व करता है ए ∪ बी।

कुछ गुण का संचालन का मिलन

* + - 1. ए ∪ बी = बी ∪ ए (कम्यूटेटिव कानून)
      2. ( ए ∪ बी ) ∪ सी = ए ∪ ( बी ∪ सी)

(साहचर्य कानून )

अंजीर 1.4

* + - 1. ए ∪ φ = एक कानून का पहचान तत्व, φ है पहचान का ∪ )

सेट 15

* + - 1. ए ∪ ए = ए (निष्क्रिय कानून)
      2. यू ∪ ए = यू (कानून का यू)
    1. *सेटों का प्रतिच्छेदन* समुच्चय A और B का प्रतिच्छेदन सभी तत्वों का समुच्चय है कौन हैं सामान्य को दोनों ए और बी। प्रतीक ' ∩ ' है इस्तेमाल किया गया को निरूपित *चौराहा* . दो समुच्चय A और B का प्रतिच्छेदन उन सभी तत्वों का समुच्चय है जो संबंधित हैं दोनों ए और बी। प्रतीकात्मक रूप से, हम लिखना ए ∩ बी = { *एक्स* : *एक्स* ∈ ए और *एक्स* ∈ बी}।

उदाहरण 15 विचार करना सेट ए और बी का उदाहरण 12. खोजो ए ∩ बी।

समाधान हम देखना वह 6, 8 हैं केवल तत्वों कौन हैं सामान्य को दोनों ए और बी। इस तरह ए ∩ बी = { 6, 8 }.

उदाहरण 16 विचार करना सेट एक्स और वाई का उदाहरण 14. खोजो एक्स ∩ वाई

समाधान हम देखना वह तत्व 'गीता' है केवल तत्व सामान्य को दोनों। इस तरह, एक्स ∩ वाई = {गीता}.

उदाहरण 17 होने देना ए = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} और बी = { 2, 3, 5, 7 }. खोजो ए ∩ बी और

इस तरह दिखाओ वह ए ∩ बी = बी।

समाधान हम पास होना ए ∩ बी = { 2, 3, 5, 7 } = बी। हम टिप्पणी वह बी ⊂ ए और वह ए ∩ बी = बी।



परिभाषा 6 दो समुच्चयों A और B का प्रतिच्छेदन है तय करना का सभी वे तत्वों कौन संबंधित को दोनों ए और बी। प्रतीकात्मक रूप से, हम लिखना

ए ∩ बी = { *एक्स* : *एक्स* ∈ ए और *एक्स* ∈ बी}

छायांकित हिस्से में अंजीर 1.5 दर्शाता है का चौराहा ए और बी।

अगर ए और बी हैं दो सेट ऐसा वह ए ∩ बी = φ , तब



**U**

**A**

**B**

ए और बी हैं बुलाया *विभिन्न करना सेट.*

के लिए उदाहरण, होने देना ए = { 2, 4, 6, 8 } और

बी = {1, 3, 5, 7 }. तब A और B असंयुक्त समुच्चय हैं, क्योंकि वहाँ हैं नहीं तत्वों कौन हैं सामान्य को ए और बी। असंयुक्त सेटों का प्रतिनिधित्व किया जा सकता है मतलब का वेन आरेख जैसा दिखाया में अंजीर 1.6

में ऊपर आरेख, ए और बी हैं विभिन्न करना सेट.

कुछ गुण का संचालन का चौराहा

* + - 1. ए ∩ बी = बी ∩ ए (कम्यूटेटिव कानून)।

अंजीर 1.5

अंजीर 1.6

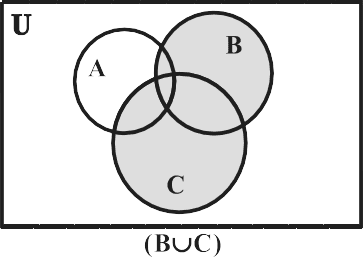
* + - 1. ( ए ∩ बी ) ∩ सी = ए ∩ ( बी ∩ सी ) (सहयोगी कानून)।
      2. φ ∩ ए = φ , यू ∩ ए = एक कानून का φ और यू).
      3. ए ∩ ए = ए (निष्क्रिय कानून)

16 गणित

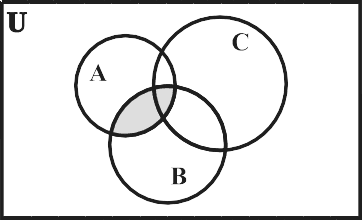
* + - 1. ए ∩ ( बी ∪ सी ) = ( ए ∩ बी ) ∪ ( ए ∩ सी ) (वितरणात्मक कानून ) मैं। इ।,

∩ वितरित ऊपर ∪

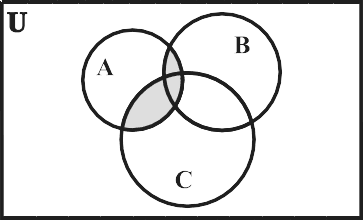
यह कर सकना होना देखा आसानी से से अगले वेन चित्र [अंजीर 1.7 (मैं) को (v)].



(i)

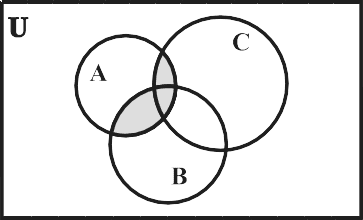


(iii)





(ii) (iv)



(वी) 

अंजीर 1.7 (मैं) को (वी)

* + 1. *अंतर का सेट*  अंतर का सेट ए और बी में यह आदेश है तय करना का तत्वों कौन संबंधित को ए लेकिन नहीं को बी। प्रतीकात्मक रूप से, हम लिखना ए – बी और पढ़ना जैसा "ए ऋण बी"।

उदाहरण 18 होने देना ए = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, बी = { 2, 4, 6, 8 }. खोजो ए – बी और बी – एक।

समाधान हम पास होना, ए – बी = { 1, 3, 5 }, तब से तत्वों 1, 3, 5 संबंधित को ए लेकिन नहीं को बी और बी – ए = { 8 }, तब से तत्व 8 अंतर्गत आता है को बी और नहीं को एक।

हम टिप्पणी वह ए – बी ≠ बी – एक।

सेट 17

उदाहरण 19 मान लीजिए V = { *a, e, i, o, u* } और बी = { *ए, मैं, क, तुम* }. खोजो वी – बी और बी – वी

समाधान हम पास होना, वी – बी = { *इ, हे* }, तब से तत्वों *इ, हे* संबंधित को वी लेकिन नहीं को बी और बी – वी = { *क* }, तब से तत्व *क* अंतर्गत आता है को बी लेकिन नहीं को वी

हम ध्यान दें कि V – B ≠ B – V. सेट का उपयोग करना- निर्माता अंकन, हम कर सकना पुनर्लेखन परिभाषा का

अंतर जैसा

ए – बी = { *एक्स* : *एक्स* ∈ ए और *एक्स* ∉ बी }

अंतर का दो सेट ए और बी कर सकना होना

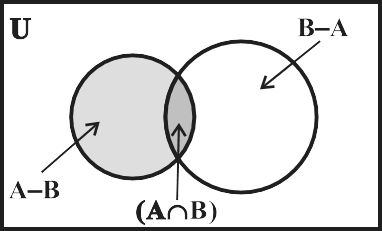
का प्रतिनिधित्व किया द्वारा वेन आरेख जैसा दिखाया में अंजीर 1.8.

छायांकित भाग के अंतर को दर्शाता है दो सेट ए और बी।

*टिप्पणी* समुच्चय A - B, A ∩ B और B - A हैं परस्पर विभिन्न करना सेट, अर्थात, चौराहा का कोई का इन दो सेट है व्यर्थ तय करना जैसा दिखाया में अंजीर 1.9.



अंजीर 1.8



अंजीर 1.9

EXERCISE 1.4

1. खोजो मिलन का प्रत्येक का अगले जोड़े का सेट : (मैं) एक्स = {1, 3, 5} वाई = {1, 2, 3}
2. ए = [ *ए, इ, मैं, ओ, यू* } बी = { *ए, बी, सी* }
3. ए = { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या और एकाधिक का 3} बी = { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या कम बजाय 6}
4. ए = { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या और 1 < *एक्स* ≤ 6 } बी = { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या और 6 < *एक्स <* 10 }

(वी) ए = {1, 2, 3}, बी = पीएचआई

1. होने देना ए = { *ए, बी* }, बी = { *ए, बी, सी* }। है ए ⊂ बी ? क्या है ए ∪ बी ?
2. अगर ए और बी हैं दो सेट ऐसा वह ए ⊂ बी, तब क्या है ए ∪ बी ?

4. अगर ए = {1, 2, 3, 4}, बी = {3, 4, 5, 6}, सी = {5, 6, 7, 8 }और डी = { 7, 8, 9, 10 }; खोजो

* 1. और ∪ बी (ii) ए ∪ सी (iii) बी ∪ सी (iv) बी ∪ डी

(वी) ए ∪ बी ∪ सी (vi) ए ∪ बी ∪ डी (vii) बी ∪ सी ∪ डी

1. खोजो चौराहा का प्रत्येक जोड़ा का सेट का सवाल 1 ऊपर।

6. अगर ए = { 3, 5, 7, 9, 11 }, बी = {7, 9, 11, 13}, सी = {11, 13, 15}और डी = {15, 17}; खोजो

* 1. और ∩ बी (ii) बी ∩ सी (iii) ए ∩ सी ∩ डी

(iv) ए ∩ सीवी ) बी ∩ डी (vi) ए ∩ (बी ∪ सी)

(vii) ए ∩ डी (viii) ए ∩ (बी ∪ डी) (ix) ( ए ∩ बी ) ∩ ( बी ∪ सी )

(एक्स) ( ए ∪ डी) ∩ ( बी ∪ सी)

18 गणित

1. अगर ए = { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या }, बी = { *एक्स* : *एक्स* है एक यहां तक की प्राकृतिक संख्या}

सी = { *एक्स* : *एक्स* है एक विषम प्राकृतिक संख्या}औरD = { *एक्स* : *एक्स* है ए मुख्य संख्या }, खोजो

* 1. और ∩ बी (ii) ए ∩ सी (iii) ए ∩ डी

(iv) बी ∩ सीवी ) बी ∩ डी (vi) सी ∩ डी

1. कौन का अगले जोड़े का सेट हैं विभिन्न करना
   1. {1, 2, 3, 4} और { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या और 4 ≤ *एक्स* ≤ 6 }
   2. { *ए, इ, मैं, ओ, यू* } और { *सी, डी, इ, एफ* }
   3. { *एक्स* : *एक्स* है एक यहां तक कि पूर्णांक } और { *एक्स* : *एक्स* है एक विषम पूर्णांक}

9. अगर ए = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21}, बी = { 4, 8, 12, 16, 20 },

सी = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }, डी = {5, 10, 15, 20 }; खोजो

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (मैं) | ए – बी | (ii) | ए – सी | (iii) | ए – डी | (iv) | बी – ए |
| (वी) | सी – ए | (vi) | डी - ए | (vii) | बी – सी | (viii) | बी – डी |
| (ix) | सी – बी | (एक्स) | डी – बी | (xi) | सी – डी | (बारह) | डी – सी |

1. अगर एक्स= { *ए, बी, सी, डी* } और वाई = { *एफ, बी, डी, जी* }, खोजो
   1. एक्स – वाई (ii) वाई – एक्स (iii) एक्स ∩ वाई
2. अगर आर है तय करना का असली नंबर और क्यू है तय करना का तर्कसंगत संख्याएँ, तब क्या है

आर – क्यू?

1. राज्य चाहे प्रत्येक का अगले कथन है सत्य या असत्य। औचित्य आपका उत्तर।
   1. { 2, 3, 4, 5 } और { 3, 6} हैं विभिन्न करना सेट.
   2. { *ए, इ, मैं, ओ, यू* } और { *ए, बी, सी, डी* }हैं विभिन्न करना सेट.
   3. { 2, 6, 10, 14 } और { 3, 7, 11, 15} हैं विभिन्न करना सेट.
   4. { 2, 6, 10 } और { 3, 7, 11} हैं विभिन्न करना सेट.

#### पूरक का ए तय करना

होने देना यू होना सार्वभौमिक तय करना कौन बना होना का सभी मुख्य नंबर और ए होना सबसेट का यू कौन बना होना का सभी वे मुख्य नंबर वह हैं नहीं विभाजक का 42. इस प्रकार, ए = { *एक्स* : *एक्स* ∈ यू और *एक्स* है नहीं ए भाजक का 42 }. हम देखना वह 2 ∈ यू लेकिन 2 ∉ ए, क्योंकि 2 है भाजक का 42. इसी प्रकार, 3 ∈ यू लेकिन 3 ∉ ए, और 7 ∈ यू लेकिन 7 ∉ एक। अब 2, 3 और 7 हैं केवल तत्वों का यू कौन करना नहीं संबंधित को एक। तय करना का इन तीन मुख्य संख्याएँ,

अर्थात, तय करना {2, 3, 7} है बुलाया *पूरक* का ए साथ आदर को यू, और है लक्षित द्वारा ए ' । इसलिए हम पास होना ए ' = {2, 3, 7}. इस प्रकार, हम देखना वह

ए ' = { *एक्स* : *एक्स* ∈ यू और *एक्स* ∉ ए }। यह नेतृत्व को अगले परिभाषा।

परिभाषा 7 माना कि U सार्वत्रिक समुच्चय है और A, U का उपसमुच्चय है। फिर इसका पूरक है A, U के उन सभी तत्वों का समुच्चय है जो A के तत्व नहीं हैं। प्रतीकात्मक रूप से, हम लिखना ए ' को निरूपित पूरक का ए साथ आदर को यू इस प्रकार,

ए ' = { *एक्स* : *एक्स* ∈ यू और *एक्स* ∉ ए }. ज़ाहिर तौर से ए ' = यू – ए

हम टिप्पणी वह पूरक का ए तय करना ए कर सकना होना देखा ऊपर, वैकल्पिक रूप से, जैसा

अंतर बीच में ए सार्वभौमिक तय करना यू और तय करना एक।

सेट 19

उदाहरण 20 होने देना यू = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} और ए = {1, 3, 5, 7, 9}. खोजो ए ' ।

समाधान हम टिप्पणी वह 2, 4, 6, 8, 10 हैं केवल तत्वों का यू कौन करना नहीं संबंधित को एक। अत: ए '' = { 2, 4, 6, 8,10 }.

उदाहरण 21 होने देना यू होना सार्वभौमिक तय करना का सभी छात्र का कक्षा ग्यारहवीं का ए सहशिक्षा विद्यालय और ए होना तय करना का सभी लड़कियाँ में कक्षा XI. खोजो ए ' ।

समाधान तब से ए है तय करना का सभी लड़कियाँ, ए ' है स्पष्ट रूप से तय करना का सभी लड़के में कक्षा।

�Note If A is a subset of the universal set U, then its complement A′ is also a

subset of U.

Again in Example 20 above, we have A′ = { 2, 4, 6, 8, 10 }

(A′ )′ = {*x* : *x* ∈ U and *x* ∉ A′}

= {1, 3, 5, 7, 9} = A

It is clear from the definition of the complement that for any subset of the universal

Hence

set U, we have ( A′ ) = A

निम्नलिखित में (A ∪ B ) ′ और A ′ ∩ B ′ के परिणाम खोजना चाहते हैं उदाहरण।

उदाहरण 22 होने देना यू = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, ए = {2, 3} और बी = {3, 4, 5}.

खोजो ए ' , बी ' , ए ' ∩ बी ' , ए ∪ बी और इस तरह दिखाओ वह ( ए ∪ बी ) '' = ए ' ∩ बी ' ।

समाधान स्पष्ट रूप से ए ' = {1, 4, 5, 6}, बी ' = { 1, 2, 6 }. इस तरह ए ' ∩ बी ' = { 1, 6 } भी ए ∪ बी = { 2, 3, 4, 5 }, इसलिए वह (ए ∪ बी ) '' = { 1, 6 }

( ए ∪ बी ) '' = { 1, 6 } = ए ' ∩ बी '

यह दिखाया जा सकता है कि उपरोक्त परिणाम सामान्यतः सत्य है। यदि A और B कोई दो हैं सबसेट का सार्वभौमिक तय करना यू, तब

(ए ∪ बी ) ' = ए ' ∩ बी ' . इसी प्रकार, (ए ∩ बी ) ' = ए ' ∪ बी ' . ये दो परिणाम बताए गए हैं में शब्द जैसा इस प्रकार :

*दो समुच्चयों के मिलन का पूरक है चौराहा का उनका पूरक और दो सेटों के प्रतिच्छेदन का पूरक है उनके पूरकों का मिलन.* इन्हें *डी कहा जाता है मॉर्गन का कानून* । इन हैं नाम बाद गणितज्ञ डे मॉर्गन.



पूरक ए '' का ए तय करना ए कर सकना होना का प्रतिनिधित्व किया

द्वारा ए वेन आरेख जैसा दिखाया में अंजीर 1.10.

छायांकित हिस्से का प्रतिनिधित्व करता है पूरक का तय करना एक।

अंजीर 1.10

20 गणित

कुछ गुण का पूरक सेट

1. पूरक कानून: (i) ए ∪ ए ' = यू (ii) ए ∩ ए ' = φ
2. डे मॉर्गन का क़ानून: (i) (ए बी)´ = ए ' ∩ बी ' (ii) (ए ∩ बी ) '' = ए ' ∪ बी '
3. कानून का दोहरा पूरक : (ए ' ) '' = ए
4. कानून का खाली तय करना और सार्वभौमिक सेट φ′ = यू और यू '' = φ . इन कानून कर सकना होना सत्यापित द्वारा का उपयोग करते हुए वेन आरेख.

EXERCISE 1.5

1. चलो यू = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, ए = { 1, 2, 3, 4}, बी = { 2, 4, 6, 8 } और

सी = { 3, 4, 5, 6 }. खोजो (मैं) ए ' (ii) बी ' (iii) (ए ∪ सी) ' (iv) (ए ∪ बी) ' (वी) (ए ' ) '

(क्योंकि) (बी – सी) '

1. अगर यू = { *ए, बी, सी, डी, इ, एफ, जी, एच* }, खोजो पूरक का अगले सेट :
   1. ए = { *ए, बी, सी* } (ii) बी = { *डी, वह, एफ, जी* }

(iii) सी = { *ए, सी, इ, जी* } (iv) डी = { *एफ, जी, एच, ए* }

1. ले रहा तय करना का प्राकृतिक नंबर जैसा सार्वभौमिक तय करना, लिखना नीचे पूरक का अगले सेट:
   1. { *एक्स* : *एक्स* एक सम प्राकृतिक संख्या है} (ii) { *एक्स* : *एक्स* है एक विषम प्राकृतिक संख्या }

(iii) { *एक्स* : *एक्स* है ए सकारात्मक एकाधिक का 3} (iv) { *एक्स* : *एक्स* है ए मुख्य संख्या }

1. { *एक्स* : *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या भाज्य द्वारा 3 और 5}
2. { *एक्स* : *एक्स* है ए उत्तम वर्ग } (vii) { *एक्स* : *एक्स* है ए उत्तम घन}

(viii) { *एक्स* : *एक्स* + 5 = 8 } (ix) { *x* : 2 *एक्स* +5 = 9}

(एक्स) { *एक्स* : *एक्स* ≥ 7 } (xi) { *x* : *एक्स* ∈ एन और 2 *एक्स* + 1 > 10 }

4. यदि यू = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, ए = {2, 4, 6, 8} और बी = { 2, 3, 5, 7}. सत्यापित करें वह

(आप) (वह ∪ बी) ' = वह ' ∩ बी ' (ii) (वह ∩ बी) ' = वह ' ∪ बी '

1. खींचना उपयुक्त वेन आरेख के लिए प्रत्येक का अगले :

(मैं) (ए ∪ बी) '' , (ii) ए ' ∩ बी ' , (iii) (ए ∩ बी) '' , (iv) ए ' ∪ बी '

1. होने देना यू होना तय करना का सभी त्रिभुज में ए विमान। अगर ए है तय करना का सभी त्रिभुज साथ पर कम से कम एक कोण अलग 60° से, क्या है ए ' ?
2. भरना में कारतूस को बनाना प्रत्येक का अगले ए सत्य कथन :

(मैं एक ∪ ए ' = . . . (ii) एफ' ∩ ए = . . .

(iii) ए ∩ ए ' = . . . (iv) यू ′ ∩ ए = . . .

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 23 दिखाओ वह तय करना का पत्र आवश्यकता है को बोलना “ मोतियाबिंद ” और तय करना का पत्र आवश्यकता है को बोलना “ ट्रैक्ट" हैं बराबर।

समाधान होने देना एक्स होना तय करना का पत्र में "मोतियाबिंद"। तब एक्स = { सी, ए, टी, आर }

सेट 21

होने देना वाई होना तय करना का पत्र में “ ट्रैक्ट” तब

वाई = { टी, आर, ए, सी, टी } = { टी, आर, ए, सी }

तब से प्रत्येक तत्व में एक्स है में वाई और प्रत्येक तत्व में वाई है में एक्स। यह इस प्रकार वह एक्स = वाई

उदाहरण 24 सूची सभी सबसेट का तय करना { -1, 0, 1 }.

समाधान होने देना ए = { -1, 0, 1 }. सबसेट का ए होना नहीं तत्व है खाली तय करना φ . सबसेट का ए होना एक तत्व हैं { -1 }, { 0 }, { 1 }. सबसेट का ए होना दो तत्वों हैं {–1, 0}, {–1, 1} ,{0, 1}. सबसेट का ए होना तीन

तत्वों का ए है ए अपने आप। इसलिए, सभी सबसेट का ए हैं φ , {–1}, {0}, {1}, {–1, 0}, {–1, 1},

{0, 1} और {–1, 0, 1}.

उदाहरण 25 दिखाओ वह ए ∪ बी = ए ∩ बी तात्पर्य ए = बी

हल मान लीजिए *a* ∈ A. तब *a* ∈ A ∪ B. चूँकि A ∪ B = A ∩ बी , *ए* ∈ ए ∩ बी. तो *ए* ∈ बी. इसलिए, ए ⊂ बी। इसी प्रकार, अगर *बी* ∈ बी, तब *बी* ∈ ए ∪ बी। तब से

ए ∪ बी = ए ∩ बी, *बी* ∈ ए ∩ बी। इसलिए, *बी* ∈ एक। इसलिए, बी ⊂ एक। इस प्रकार, ए = बी

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 1

* 1. निम्नलिखित समुच्चयों में से निर्णय लें कि कौन सा समुच्चय किसका उपसमुच्चय है एक और दूसरा: ए = { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर और *एक्स* संतुष्ट *एक्स* 2 – 8 *एक्स* + 12 = 0 },

बी = { 2, 4, 6 }, सी = { 2, 4, 6, 8, }, डी = { 6 }.

* 1. में प्रत्येक का अगले, ठानना चाहे कथन है सत्य या असत्य। अगर यह है सत्य, सिद्ध करना यह। अगर यह है असत्य, देना एक उदाहरण।
     1. अगर *एक्स* ∈ ए और ए ∈ बी , तब *एक्स* ∈ बी
     2. अगर ए ⊂ बी और बी ∈ सी , तब ए ∈ सी
     3. अगर ए ⊂ बी और बी ⊂ सी , तब ए ⊂ सी
     4. अगर ए ⊄ बी और बी ⊄ सी , तब ए ⊄ सी
     5. अगर *एक्स* ∈ ए और ए ⊄ बी , तब *एक्स* ∈ बी
     6. अगर ए ⊂ बी और *एक्स* ∉ बी , तब *एक्स* ∉ ए
  2. मान लीजिए A, B, और C ऐसे समुच्चय हैं कि A ∪ B = A ∪ C और A ∩ B = A ∩ C. दिखाएँ वह बी = सी।
  3. दिखाओ वह अगले चार स्थितियाँ हैं समकक्ष :
     1. ए ⊂ बी(ii) ए – बी = φ (iii) ए ∪ बी = बी (iv) ए ∩ बी = ए
  4. दिखाओ वह अगर ए ⊂ बी, तब सी – बी ⊂ सी – एक।
  5. दिखाओ वह के लिए कोई सेट ए और बी,

ए = ( ए ∩ बी ) ∪ ( ए – बी ) और ए ∪ ( बी – ए ) = ( ए ∪ बी )

* 1. का उपयोग करते हुए गुण का सेट, दिखाओ वह

(मैं) पूर्वाह्न ∪ ( पूर्वाह्न ∩ बी ) = ए (ii) पूर्वाह्न ∩ ( पूर्वाह्न ∪ बी ) = पूर्वाह्न।

* 1. दिखाओ वह ए ∩ बी = ए ∩ सी संकेत करने की आवश्यकता नहीं है बी = सी.

22 गणित

* 1. चलो ए और बी होना सेट. यदि एक ∩ एक्स = बी ∩ एक्स = φ और ए ∪ एक्स = बी ∪ एक्स के लिए कुछ तय करना एक्स, दिखाओ वह ए = बी।

( संकेत ए = ए ∩ ( ए ∪ एक्स ) , बी = बी ∩ ( बी ∪ एक्स ) और उपयोग विभाजित करनेवाला कानून )

* 1. . खोजो सेट ए, बी और सी ऐसा वह ए ∩ बी, बी ∩ सी और ए ∩ सी हैं गैर खाली सेट और ए ∩ बी ∩ सी = φ .

*सारांश*

यह अध्याय सौदा साथ कुछ बुनियादी परिभाषाएं और परिचालन को शामिल सेट. इन हैं संक्षेप नीचे:

- ए तय करना है ए अच्छी तरह से परिभाषित संग्रह का वस्तुएं.

- ए तय करना कौन करता है नहीं रोकना कोई तत्व है बुलाया *खाली तय करना* ।

- ए तय करना कौन बना होना का ए निश्चित संख्या का तत्वों है बुलाया *परिमित तय करना* , अन्यथा, तय करना है बुलाया *अनंत तय करना* ।

� दो सेट ए और बी हैं कहा को होना बराबर अगर वे पास होना बिल्कुल वही तत्व.

- ए तय करना ए है कहा को होना सबसेट का ए तय करना बी, अगर प्रत्येक तत्व का ए है भी एक तत्व का बी। अंतराल हैं सबसेट का आर।

� द मिलन का दो सेट ए और बी है तय करना का सभी वे तत्वों कौन हैं दोनों में से एक में ए या में बी।

� द चौराहा का दो सेट ए और बी है तय करना का सभी तत्वों कौन हैं सामान्य। अंतर का दो सेट ए और बी में यह आदेश है तय करना का तत्वों

कौन संबंधित को ए लेकिन नहीं को बी।

� द पूरक का ए सबसेट ए का सार्वभौमिक तय करना यू है तय करना का सभी तत्वों का यू कौन हैं नहीं तत्वों का एक।

� के लिए कोई दो सेट ए और बी, (ए ∪ बी) ' = ए ' ∩ बी ' और ( ए ∩ बी ) '' = ए ' ∪ बी '

*Historical Note*

The modern theory of sets is considered to have been originated largely by the German mathematician Georg Cantor (1845-1918). His papers on set theory appeared sometimes during 1874 to 1897. His study of set theory came when he was studying trigonometric series of the form *a*1 sin *x* + *a*2 sin 2*x* + *a*3 sin 3*x* + ... He published in a paper in 1874 that the set of real numbers could not be put into one-to-one correspondence wih the integers. From 1879 onwards, he publishd several papers showing various properties of abstract sets.

सेट 23

कैंटर का काम था कुंआ प्राप्त द्वारा एक और प्रसिद्ध गणितज्ञ रिचर्ड डेडेकाइंड (1831-1916) लेकिन क्रोनेकर (1810-1893) आलोचना उसे के लिए के बारे में अनंत समुच्चय परिमित समुच्चय की तरह ही होता है। एक अन्य जर्मन गणितज्ञ गोटलोब फ्रीज, पर मोड़ का शतक, पेश किया तय करना लिखित जैसा सिद्धांतों का तर्क। तक तब पूरा तय करना लिखित था आधारित पर मान्यता का अस्तित्व का तय करना का सभी सेट. यह था प्रसिद्ध अंग्रेजी दार्शनिक बर्टैंड रसेल (1872- 1970 ) कौन दिखाया है में 1902 वह मान्यता का अस्तित्व का ए तय करना का सभी सेट नेतृत्व को ए विरोधाभास। यह नेतृत्व किया को प्रसिद्ध रसेल का विरोधाभास. पॉल आर.हल्मोस लिखते हैं के बारे में यह में उसका किताब 'अनुभवहीन तय करना लिखित' वह "कुछ नहीं रोकना सब कुछ"। रसेल का विरोधाभास था नहीं केवल एक कौन पड़ी में तय करना लिखित।

बाद में कई गणितज्ञों और तर्कशास्त्रियों द्वारा कई विरोधाभासों का निर्माण किया गया। इन सभी विरोधाभासों के परिणामस्वरूप, सेट सिद्धांत का पहला स्वयंसिद्धीकरण हुआ था प्रकाशित में 1908 द्वारा अर्नस्ट ज़र्मेलो। एक और एक था प्रस्तावित द्वारा अब्राहम फ्रेंकेल में 1922. जॉन वॉन न्यूमन में 1925 पुर: स्पष्ट रूप से स्वयंसिद्ध का नियमितता. बाद में में 1937 पॉल बर्नेज़ दिया ए तय करना का अधिक संतोषजनक स्वयंसिद्धीकरण. इन सिद्धांतों का एक संशोधन कर्ट गोडेल ने अपने में किया था प्रबंध में 1940. यह था ज्ञात जैसा वॉन न्यूमैन-बर्नेज़ (वीएनबी) या गोडेल- बर्नेज़ (जीबी) तय करना लिखित।

इन सभी कठिनाइयों के बावजूद, कैंटर का सेट सिद्धांत वर्तमान समय में उपयोग किया जाता है अंक शास्त्र। में तथ्य, इन दिन अधिकांश का अवधारणाओं और परिणाम में अंक शास्त्र हैं व्यक्त में तय करना सैद्धांतिक भाषा।

— **�** —

अध्याय 2

RELATIONS AND FUNCTIONS

गणित *है अपरिहार्य यंत्र का सभी भौतिक अनुसंधान। – बर्थलॉट* �

#### परिचय

अधिकांश गणित एक पैटर्न खोजने के बारे में है - a बदलती मात्राओं के बीच पहचानने योग्य लिंक। हमारे में दैनिक ज़िंदगी, हम आना आर-पार अनेक पैटर्न वह चिह्नित करना रिश्ते ऐसा जैसा भाई और बहन, पिता और बेटा, अध्यापक और छात्र. गणित में भी हमें कई चीजें देखने को मिलती हैं रिश्ते ऐसा जैसा संख्या *एम* है कम बजाय संख्या *एन* , रेखा *एल* है समानांतर को रेखा *एम* , तय करना ए है ए सबसेट का तय करना बी। में सभी इन, हम ध्यान दें कि एक संबंध में निश्चित रूप से वस्तुओं के जोड़े शामिल होते हैं आदेश देना। इस अध्याय में हम सीखेंगे कि जोड़ियों को कैसे जोड़ा जाता है वस्तुओं से दो सेट और तब परिचय देना रिश्ते बीच में जोड़ी में दो वस्तुएँ। अंत में, हम इसके बारे में जानेंगे विशेष रिश्ते कौन इच्छा अर्हता को होना कार्य.

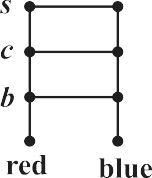
जी . डब्ल्यू लीबनिट्ज़ (1646-1716)

अवधारणा का समारोह है बहुत महत्वपूर्ण में अंक शास्त्र तब से यह कब्जा विचार का ए गणितीय सटीक पत्र-व्यवहार बीच में एक मात्रा साथ अन्य।

#### काटीज़ियन उत्पादों का सेट

कल्पना करना ए है ए तय करना का 2 रंग की और बी है ए तय करना का 3 वस्तुएं, अर्थात,

ए = {लाल, नीला}और बी = { *बी* , *सी* , *एस* },

कहाँ *बी* , *सी* और *एस* प्रतिनिधित्व करना ए विशिष्ट थैला, परत और कमीज, क्रमश। कैसे अनेक जोड़े का रंगीन वस्तुओं कर सकना होना बनाया से इन दो सेट?

कार्यवाही में ए बहुत व्यवस्थित ढंग, हम कर सकना देखना वह वहाँ इच्छा होना 6 विशिष्ट जोड़े जैसा दिया गया नीचे:

(लाल, *बी* ), (लाल, *सी* ), (लाल, *एस* ), (नीला, *बी* ), (नीला, *सी* ), (नीला, *एस* )।

इस प्रकार, हम पाना 6 विशिष्ट वस्तुओं (अंजीर 2.1).

होने देना हम याद करना से हमारा पहले कक्षाओं वह एक आदेश दिया जोड़ा का तत्वों लिया से कोई दो सेट पी और क्यू है ए की जोड़ी तत्वों लिखा हुआ में छोटा

अंजीर 2.1

रिश्ते और कार्य 25

कोष्ठक और वर्गीकृत किया एक साथ में ए विशिष्ट आदेश देना, अर्थात, ( *पी क्यू* ), *पी* ∈ पी और *क्यू* ∈ क्यू . यह नेतृत्व को अगले परिभाषा:

परिभाषा 1 दिया गया दो गैर खाली सेट पी और क्यू। काटीज़ियन उत्पाद पी × क्यू है तय करना P से तत्वों के सभी क्रमित युग्मों का और क्यू, अर्थात,

पी.एस × क्यू = { ( *पी क्यू* ) :::::::::::::::::::: *पी* ∈ पी, *क्यू* ∈ क्यू } }

अगर दोनों में से एक पी या क्यू है व्यर्थ तय करना, तब पी × क्यू इच्छा भी होना खाली तय करना, अर्थात, पी × क्यू = φ

से चित्रण दिया गया ऊपर हम टिप्पणी वह

ए × बी = {(लाल, *बी* ), (लाल, *सी* ), (लाल, *एस* ), (नीला, *बी* ), (नीला, *सी* ), (नीला, *एस* )}. दोबारा, विचार करना दो सेट:

ए = {डीएल, एमपी, केए}, जहां डीएल, एमपी, केए दिल्ली का प्रतिनिधित्व करते हैं, क्रमशः मध्य प्रदेश और कर्नाटक और बी = {01,02, 03}प्रतिनिधित्व कोड के लिए लाइसेंस प्लेटें का वाहनों जारी किए गए डीएल द्वारा, एमपी और के.ए .

अगर तीन राज्य, दिल्ली, मध्य प्रदेश और कर्नाटक थे निर्माण कोड के लिए लाइसेंस प्लेटें का वाहन, साथ प्रतिबंध वह कोड शुरू करना साथ एक तत्व से तय करना ए, कौन हैं जोड़े उपलब्ध से इन सेट और कैसे अनेक ऐसा जोड़े इच्छा वहाँ होना ( अंजीर 2.2)?

**03**

02

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**01**

**डीएल**  **एमपी**  **केए**

अंजीर 2.2

उपलब्ध जोड़े हैं:(डीएल,01), (डीएल,02), (डीएल,03), (एमपी,01), (एमपी,02), (एमपी,03),

(केए,01), (केए,02), (केए,03) और उत्पाद का तय करना ए और सेट बी है द्वारा दिए गए

ए × बी = {(डीएल,01), (डीएल,02), (डीएल,03), (एमपी,01), (एमपी,02), (एमपी,03), (केए,01), (केए, 02), (केए,03)}.

यह कर सकना आसानी से होना देखा वह वहाँ इच्छा होना 9 ऐसा जोड़े में काटीज़ियन उत्पाद, तब से

प्रत्येक सेट में 3 तत्व हैं ए और बी। इससे हमें 9 संभावित कोड मिलते हैं। भी टिप्पणी वह आदेश में कौन इन तत्वों हैं बनती है महत्वपूर्ण। के लिए उदाहरण, कोड (डीएल, 01) इच्छा नहीं होना वही जैसा कोड (01, डीएल)।

के तौर पर अंतिम चित्रण, इसपर विचार करें दो सेट ए= { *ए* 1 , *एक* 2 } और  बी = { *बी* 1 , *बी* 2 , *बी* 3 , *बी* 4 } (चित्र 2.3) . 

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

ए × बी = {( *ए* , *बी* ), ( *ए* , *बी* ), ( *ए* , *बी* ), ( *ए* , *बी* ), ( *ए* , *बी* ), ( *ए* , *बी* ),

1 1 1 2 1 3 1 4 2 1 2 2

( *ए* 2 , *बी* 3 ), ( *ए* 2 , *बी* 4 )}। 

 8 आदेश दिया जोड़े इस प्रकार बनाया कर सकना प्रतिनिधित्व करना पद का अंक में विमान अगर ए और बी हैं सबसेट का तय करना का असली नंबर और यह है

ज़ाहिर वह बिंदु में पद ( *ए* 1 , *बी* 2 ) इच्छा होना विशिष्ट से बिंदु में पद ( *बी* 2 , *ए* 1 ).

*टिप्पणी*

अंजीर 2.3

* + 1. दो आदेश दिया जोड़े हैं बराबर, अगर और केवल अगर संगत पहला तत्वों हैं बराबर और दूसरा तत्वों हैं भी बराबर।

26 गणित

* + 1. अगर वहाँ हैं *पी* तत्वों में ए और *क्यू* तत्वों में बी, तब वहाँ इच्छा होना *पी क्यू*

में तत्व ए × बी, अर्थात, अगर *एन* (ए) = *पी* और *एन* (बी) = *क्यू,* तब *एन* (ए × बी) = *पी क्यू* ।

* + 1. अगर ए और बी हैं गैर खाली सेट और दोनों में से एक ए या बी है एक अनंत तय करना, तब इसलिए है ए × बी।
    2. ए × ए × ए = {( *ए* , *बी* , *सी* ) : *ए* , *बी* , *सी* ∈ ए}। यहाँ ( *ए* , *बी* , *सी* ) है बुलाया एक *आदेश दिया*

*त्रिक* ।

उदाहरण 1 अगर ( *एक्स* + 1, *य* – 2) = (3,1), खोजो मान का *एक्स* और *य* .

समाधान तब से आदेश दिया जोड़े हैं बराबर, संगत तत्वों हैं बराबर। इसलिए *एक्स* + 1 = 3 और *य* – 2 = 1.

हल हम *एक्स* प्राप्त करें = 2 और *य* = 3.

उदाहरण 2 अगर पी = { *ए* , *बी* , *सी* } और क्यू = { *आर* }, रूप सेट पी × क्यू और क्यू × पी। हैं इन दो उत्पादों बराबर?

समाधान द्वारा की परिभाषा काटीज़ियन उत्पाद,

पी × क्यू = {( *ए* , *आर* ), ( *बी* , *आर* ), ( *सी* , *आर* )} और क्यू × पी = {( *आर* , *ए* ), ( *आर* , *बी* ), ( *आर* , *सी* )}

तब से, द्वारा परिभाषा का समानता का आदेश दिया जोड़े, जोड़ा ( *ए* , *आर* ) है नहीं बराबर को जोड़ा ( *आर* , *ए* ), हम निष्कर्ष वह पी × क्यू ≠ क्यू × पी।

तथापि, प्रत्येक सेट में तत्वों की संख्या होगी ऐसे ही बनें।

उदाहरण 3 चलो ए = {1,2,3}, बी = {3,4} और सी = {4,5,6}. खोजो

(मैं) ए × (बी ∩ सी) (ii) (ए × बी) ∩ (ए × सी)

(iii) ए × (बी ∪ सी) (iv) (ए× बी) ∪ (ए× सी)

समाधान (मैं) द्वारा परिभाषा का चौराहा का दो सेट, (बी ∩ सी) = {4}. इसलिए, ए × (बी ∩ सी) = {(1,4), (2,4), (3,4)}.

(ii) अब (ए × बी) = {(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)}

और (ए × सी) = {(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)}

इसलिए, (ए × बी) ∩ (ए × सी) = {(1, 4), (2, 4), (3, 4)}.

1. चूंकि, (बी ∪ सी) = {3, 4, 5, 6}, हम पास होना

ए × ( बी ∪ सी) = {(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3),

(3,4), (3,5), (3,6)}.

1. का उपयोग करते हुए सेट ए × बी और ए × सी से भाग (ii) ऊपर, हम प्राप्त

(ए × बी) ∪ (ए × सी) = {(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,3), (3,4), (3,5), (3,6)}.

रिश्ते और कार्य 27

उदाहरण 4 अगर पी = {1, 2}, रूप तय करना पी × पी × पी।

समाधान हम पास होना, पी × पी × पी = {(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1),

(2,2,2)}.

उदाहरण 5 अगर आर है तय करना का सभी असली संख्याएँ, क्या करना काटीज़ियन उत्पादों आर × आर

और आर × आर × आर प्रतिनिधित्व करना?

समाधान कार्तीय गुणन R × R समुच्चय R × R={( *x* , *y* ) : *x, y* ∈ R} को दर्शाता है। जो *द्वि-आयामी अंतरिक्ष में सभी बिंदुओं के निर्देशांक का प्रतिनिधित्व करता है* और कार्तीय गुणन R × R × R समुच्चय R × R × R ={( *x* , *y, z* ) : *x, y* , *z* ∈ R} का प्रतिनिधित्व करता है। कौन का प्रतिनिधित्व करता है *COORDINATES का सभी अंक में तीन आयामी अंतरिक्ष* ।

उदाहरण 6 अगर ए × बी ={( *पी* , *क्यू* ),( *पी* , *आर* ), ( *एम* , *क्यू* ), ( *एम* , *आर* )}, खोजो ए और बी।

समाधान A = प्रथम तत्वों का समुच्चय = { *पी* , *एम* }

बी = तय करना का दूसरा तत्वों = { *क्यू* , *आर* }।

EXERCISE 2.1

* 1. अगर

 *एक्स* + 1 *य –* 2  =  5 *,* 1  , खोजो मान का *एक्स* और *य* .

  

 3 3   3 3 

* 1. अगर तय करना ए है 3 तत्वों और तय करना बी = {3, 4, 5}, तब खोजो संख्या का तत्वों में (ए × बी).
  2. अगर जी = {7, 8} और एच = {5, 4, 2}, खोजो जी × एच और एच × जी।
  3. राज्य चाहे प्रत्येक का अगले कथन हैं सत्य या असत्य। अगर कथन गलत है, फिर से लिखें दिया गया कथन सही है.
     1. अगर पी = { *एम* , *n* } और क्यू = { *एन* , *एम* }, फिर पी × क्यू = {( *एम* , *एन* ),( *एन* , *एम* )}।
     2. अगर ए और बी हैं गैर खाली सेट, तब ए × बी है ए गैर खाली तय करना का आदेश दिया जोड़े ( *एक्स* , *य* ) ऐसा वह *एक्स* ∈ ए और *य* ∈ बी।

(iii) अगर ए = {1, 2}, बी = {3, 4}, तब ए × (बी ∩ φ ) = φ .

5. अगर ए = {–1, 1}, खोजो ए × ए × एक।

1. अगर ए × बी = {( *ए* , *एक्स* ),( *ए* , *य* ), ( *बी* , *एक्स* ), *(बी* , *य* )}. खोजो ए और बी।

7. होने देना ए = {1, 2}, बी = {1, 2, 3, 4}, सी = {5, 6} और डी = {5, 6, 7, 8}. सत्यापित करें वह

* 1. ए × ( बी ∩ सी) = (ए × बी) ∩ (ए × सी)। (ii) ए × सी है ए सबसेट का बी × डी।

1. माना A = {1, 2} और B = {3, 4}। A × B लिखें। A × B के कितने उपसमुच्चय होंगे ? सूची उन्हें।
2. होने देना ए और बी होना दो सेट ऐसा वह *एन* (ए) = 3 और *एन* (बी) = 2. अगर ( *एक्स* , 1), ( *य* , 2), ( *z* , 1) हैं में ए × बी, खोजें ए और बी, कहाँ *एक्स* , *य* और *जेड* हैं विशिष्ट तत्व.

28 गणित

1. काटीज़ियन उत्पाद ए × ए है 9 तत्वों के बीच कौन हैं मिला (-1, 0) और (0,1). खोजो तय करना ए और शेष तत्वों का ए × एक।

#### रिश्ते

विचार करना दो सेट पी = { *ए* , *बी* , *सी* } और क्यू = {अली, भानु, बिनॉय, चंद्रा, दिव्या}. काटीज़ियन उत्पाद का

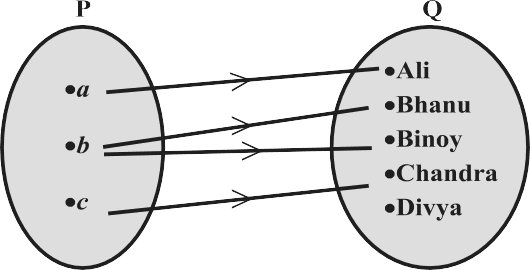


Fig 2.4

पी और Q के पास है 15 का ऑर्डर दिया गया जोड़े कौन P × Q = {( *a* , Ali) के रूप में सूचीबद्ध किया जा सकता है ( *ए,* भानु), ( *ए* , बिनॉय), ..., ( *सी* , दिव्या)}.

हम कर सकना अब प्राप्त ए सबसेट का पी × क्यू द्वारा परिचय ए रिश्ता आर पहले तत्व *x* और के बीच प्रत्येक क्रमित युग्म का दूसरा तत्व *y* ( *एक्स* , *य* ) जैसा

आर= { ( *एक्स,वाई* ): *एक्स* है पहला पत्र का नाम *हाँ* , *एक्स* ∈ पी *, य* ∈ क्यू}।

तब आर = {( *ए* , अली), ( *बी* , भानु), ( *बी* , बिनॉय), ( *सी* , चंद्रा)}

एक दृश्य प्रतिनिधित्व का यह रिश्ता आर (बुलाया एक *तीर आरेख* ) है दिखाया में अंजीर 2.4.

परिभाषा 2 ए रिश्ता आर से ए गैर खाली तय करना ए को ए गैर खाली तय करना बी है ए सबसेट का कार्तीय गुणनफल A × B. उपसमुच्चय के बीच संबंध का वर्णन करके प्राप्त किया जाता है ए × बी में क्रमित जोड़े का पहला तत्व और दूसरा तत्व। दूसरा तत्व है बुलाया *छवि* का पहला तत्व।

परिभाषा 3 तय करना का सभी पहला तत्वों का आदेश दिया जोड़े में ए रिश्ता आर से ए तय करना ए को ए तय करना बी है बुलाया *कार्यक्षेत्र* का रिश्ता आर।

परिभाषा 4 एक समुच्चय A से समुच्चय B के संबंध R में सभी दूसरे तत्वों का समुच्चय है संबंध R की *सीमा* कहलाती है। संपूर्ण समुच्चय B को का *कोडोमेन कहा जाता है* रिश्ता आर. ध्यान दें श्रेणी ⊂ कोडोमेन.

*टिप्पणी* (मैं) किसी *संबंध को बीजगणितीय रूप से रोस्टर* द्वारा दर्शाया जा सकता है *तरीका* या द्वारा *सेट-निर्माता तरीका* ।

* 1. एक तीर आरेख है ए तस्वीर प्रतिनिधित्व का ए रिश्ता।

उदाहरण 7 होने देना ए = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. परिभाषित करना ए रिश्ता आर से ए को ए द्वारा आर = {( *एक्स* , *य* ) : *य* = *एक्स* + 1 }

1. चित्रित यह रिश्ता का उपयोग करते हुए एक तीर आरेख.
2. लिखना नीचे कार्यक्षेत्र, कोडोमेन और श्रेणी का आर।

समाधान (मैं) द्वारा परिभाषा का रिश्ता,

आर = {(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)}.

रिश्ते और कार्य 29

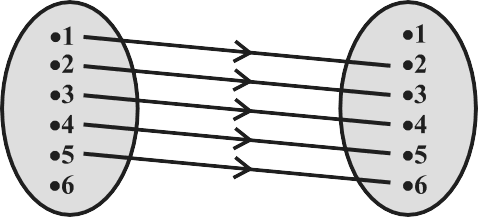
संगत तीर आरेख है दिखाया में अंजीर 2.5.

(ii) हम कर सकना देखना वह कार्यक्षेत्र ={1, 2, 3, 4, 5,}

इसी प्रकार, श्रेणी = {2, 3, 4, 5, 6}

और कोडोमेन = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

उदाहरण 8 अंजीर 2.6 दिखाता है ए रिश्ता



अंजीर 2.5

बीच में सेट पी और क्यू। लिखना यह रिश्ता (मैं) में सेट-निर्माता रूप, (ii) में रोस्टर रूप।

#### क्या है इसका कार्यक्षेत्र और श्रेणी?

समाधान यह स्पष्ट है कि संबंध R है " *एक्स* है वर्ग का य”।

1. में सेट-निर्माता रूप, आर = {( *एक्स* , *य* ): *एक्स*

है वर्ग का *हाँ, एक्स* ∈ पी, *य* ∈ क्यू}

1. में रोस्टर रूप, आर = {(9, 3),

(9, –3), (4, 2), (4, –2), (25, 5), (25, –5)}

कार्यक्षेत्र का यह रिश्ता है {4, 9, 25}.

श्रेणी का यह रिश्ता है {– 2, 2, -3, 3, -5, 5}.

ध्यान दें कि तत्व 1 सेट पी में किसी भी तत्व से संबंधित नहीं है। तय करना क्यू है कोडोमेन का यह रिश्ता।

अंजीर 2.6

is the number of possible subsets of A × B. If *n*(A ) = *p* and *n*(B) = *q*, then

*n* (A × B) = *pq* and the total number of relations is 2*pq*.

�Note The total number of relations that can be defined from a set A to a set B

उदाहरण 9 होने देना ए = {1, 2} और बी = {3, 4}. खोजो संख्या का रिश्ते से ए को बी।

समाधान हम पास होना,

ए × बी = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}.

तब से *एन* (ए × बी ) = 4, संख्या का सबसेट का ए × बी है 2 4 . इसलिए, संख्या का रिश्ते से ए में बी इच्छा होना 2 4 .

*टिप्पणी* ए रिश्ता आर से ए को ए है भी कहा गया जैसा ए रिश्ता पर एक।

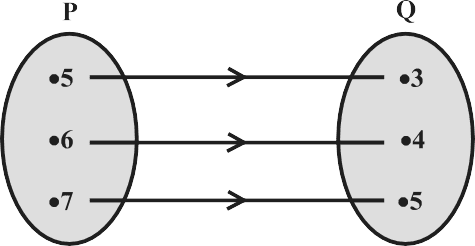
EXERCISE 2.2

1. होने देना ए = {1, 2, 3,...,14}। A से A तक संबंध R को परिभाषित करें आर = {( *एक्स* , *य* ) : 3 *एक्स* – *य* = 0, कहां *एक्स* , *य* ∈ ए}। लिखना नीचे इसका कार्यक्षेत्र, कोडोमेन और श्रेणी।

30 गणित

1. परिभाषित करना ए रिश्ता आर पर तय करना एन का प्राकृतिक संख्या द्वारा आर = {( *एक्स* , *य* ) : *य* = *एक्स* + 5,

*एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या कम बजाय 4; *एक्स* , *य* ∈ एन}. चित्रित यह संबंध का उपयोग करते हुए रोस्टर रूप। लिखो डोमेन और सीमा।

1. ए = {1, 2, 3, 5} और बी = {4, 6, 9}. परिभाषित करना ए रिश्ता आर से ए को बी द्वारा आर = {( *एक्स* , *वाई ): एक्स* और *वाई* के बीच का अंतर अजीब है; *x* ∈ A, *y* ∈ B}. इसमें R लिखें रोस्टर रूप।
2. चित्र 2.7 दिखाता है ए संबंध समुच्चय P और Q के बीच। इसे लिखें रिश्ता
   1. में सेट-निर्माता रूप (ii) रोस्टर रूप। क्या है इसका कार्यक्षेत्र और श्रेणी?
3. होने देना ए = {1, 2, 3, 4, 6}. होने देना आर होना

रिश्ता पर ए परिभाषित द्वारा

{( *ए* , *बी* ): *ए* , *बी* ∈ ए, *बी* है बिल्कुल भाज्य द्वारा *ए* }।

* 1. लिखना आर में रोस्टर रूप
  2. खोजो कार्यक्षेत्र का आर
  3. की सीमा ज्ञात कीजिए आर।

अंजीर 2.7

1. ठानना कार्यक्षेत्र और श्रेणी का रिश्ता आर परिभाषित द्वारा आर = {( *एक्स* , *एक्स* + 5) : *एक्स* ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5}}।
2. लिखना रिश्ता आर = {( *एक्स* , *x* 3 ) : *एक्स* है ए मुख्य संख्या कम बजाय 10} में रोस्टर रूप।
3. होने देना ए = { *एक्स, हाँ* , *z* } और B = {1, 2}. से संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए ए बी को.
4. होने देना आर होना रिश्ता पर जेड परिभाषित द्वारा आर = {( *ए* , *बी* ): *ए* , *बी* ∈ जेड, *ए* – *बी* है एक पूर्णांक}. खोजो कार्यक्षेत्र और श्रेणी का आर।
   1. कार्य

में यह अनुभाग, हम अध्ययन ए विशेष प्रकार का रिश्ता बुलाया *समारोह।* यह है एक का अधिकांश महत्वपूर्ण अवधारणाओं में अंक शास्त्र। हम कर सकना, कल्पना ए समारोह जैसा ए नियम, कौन का उत्पादन कुछ दिए गए तत्वों में से नए तत्व। 'मानचित्र' या जैसे कई शब्द हैं 'मैपिंग' इस्तेमाल किया गया को निरूपित ए समारोह।

परिभाषा 5 समुच्चय A से समुच्चय B तक संबंध *f को एक फलन कहा जाता है* यदि प्रत्येक तत्व सेट का ए है एक और केवल एक छवि में तय करना बी।

में अन्य शब्द, ए समारोह *एफ* है ए रिश्ता से ए गैर खाली तय करना ए को ए गैर खाली B को ऐसे सेट करें कि *f* का डोमेन A हो और *f में कोई दो अलग क्रम वाले जोड़े न हों* लीजिए वही पहला तत्व।

यदि *एफ* है एक समारोह से ए को बी और ( *ए* , *बी* ) ∈ *एफ,* तब *एफ* ( *ए* ) = *बी* , जहां *बी* है बुलाया

*छवि* का *ए* अंतर्गत *एफ* और *ए* है बुलाया *पूर्वछवि* का *बी* अंतर्गत *एफ* ।

रिश्ते और कार्य 31

समारोह *एफ* से ए को बी है लक्षित द्वारा *एफ* : ए � बी।

देखना पर पहले का उदाहरण, हम कर सकना आसानी से देखना वह रिश्ता में उदाहरण 7 है नहीं ए समारोह क्योंकि तत्व 6 है नहीं छवि।

फिर, उदाहरण 8 में संबंध कोई फ़ंक्शन नहीं है क्योंकि इसमें तत्व हैं कार्यक्षेत्र हैं जुड़े हुए को अधिक बजाय एक इमेजिस। इसी प्रकार, रिश्ता में उदाहरण 9 है यह भी कोई फ़ंक्शन नहीं है. ( *क्यों* ?) नीचे दिए गए उदाहरणों में हम और भी बहुत कुछ देखेंगे रिश्ते कुछ का कौन हैं कार्य और अन्य हैं नहीं।

उदाहरण 10 होने देना एन होना तय करना का प्राकृतिक नंबर और रिश्ता आर होना परिभाषित पर एन ऐसा वह आर = {( *एक्स* , *य* ) : *य* = 2 *एक्स, एक्स, य* ∈ एन}।

क्या है कार्यक्षेत्र, कोडोमेन और श्रेणी का आर? है यह रिश्ता ए समारोह?

समाधान R का डोमेन प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय N है। कोडोमेन भी N है। श्रेणी है तय करना का यहां तक की प्राकृतिक नंबर.

चूँकि प्रत्येक प्राकृत संख्या *n* की एक और केवल एक छवि होती है, यह संबंध a है समारोह।

उदाहरण 11 नीचे दिए गए निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक की जांच करें और प्रत्येक में बताएं मामला, दे रही है कारण चाहे यह है ए समारोह या नहीं?

(मैं) आर = {(2,1),(3,1), (4,2)}, (ii) आर = {(2,2),(2,4),(3,3), (4,4)}

(iii) आर = {(1,2),(2,3),(3,4), (4,5), (5,6), (6,7)}

समाधान (मैं) तब से 2, 3, 4 हैं तत्वों का कार्यक्षेत्र का आर होना उनका अद्वितीय छवियां, यह रिश्ता आर है ए समारोह।

* 1. चूँकि एक ही पहला तत्व 2 दो अलग-अलग छवियों 2 से मेल खाता है और 4, यह रिश्ता है नहीं ए समारोह।
  2. चूँकि प्रत्येक तत्व की एक और केवल एक छवि होती है, यह संबंध एक है समारोह।

परिभाषा 6 एक फ़ंक्शन जिसकी सीमा के रूप में या तो R या उसका एक उपसमुच्चय होता है, कहलाता है एक *वास्तविक मूल्यवान कार्य* । इसके अलावा, यदि इसका डोमेन भी या तो R है या R का उपसमुच्चय है, तो यह है बुलाया ए *असली समारोह* ।

उदाहरण 12 होने देना एन होना तय करना का प्राकृतिक नंबर. परिभाषित करना ए असली महत्वपूर्ण समारोह

*एफ* : एन एन द्वारा *एफ* ( *एक्स* ) = 2 *एक्स* + 1. का उपयोग करते हुए यह परिभाषा, पूरा मेज़ दिया गया नीचे।

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *य* | *एफ* (1) = ... | *एफ* (2) = ... | *एफ* (3) = ... | *एफ* (4) = ... | *एफ* (5) = ... | *एफ* (6) = ... | *एफ* (7) = ... |

समाधान पूरी तालिका दी गई है द्वारा

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *य* | *एफ* (1) = 3 | *एफ* (2) = 5 | *एफ* (3) = 7 | *एफ* (4) = 9 | *च* (5) = 11 | *एफ* (6) = 13 | *एफ* (7) =15 |

32 गणित

* + 1. *कुछ कार्य और उनका रेखांकन*

1. पहचान समारोह माना R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। वास्तविक मूल्य को परिभाषित करें फलन *f* : R → R बटा *y* = प्रत्येक *x* ∈ R के लिए *f* ( *x* ) = *x* । ऐसे फ़ंक्शन को कहा जाता है *पहचान समारोह* । यहाँ कार्यक्षेत्र और श्रेणी का *एफ* हैं आर। ग्राफ है ए सीधा रेखा जैसा दिखाया में अंजीर 2.8. यह गुजरता के माध्यम से मूल।



अंजीर 2.8

1. स्थिर समारोह परिभाषित करना समारोह *एफ* : आर → आर द्वारा *य = एफ* ( *एक्स* ) = *सी* , *एक्स* ∈ आर कहाँ

*सी* है ए स्थिर और प्रत्येक *एक्स* ∈ आर। यहाँ कार्यक्षेत्र का *एफ* है आर और इसका श्रेणी है { *सी* }।







अंजीर 2.9

रिश्ते और कार्य 33

ग्राफ है ए रेखा समानांतर को *एक्स* -अक्ष. के लिए उदाहरण, अगर *एफ* ( *एक्स* )=3 के लिए प्रत्येक *एक्स* ∈ आर, तब इसका ग्राफ इच्छा होना ए रेखा जैसा दिखाया में अंजीर 2.9.

1. बहुपद समारोह ए समारोह *एफ* : आर → आर है कहा को होना *बहुपद समारोह* अगर

के लिए प्रत्येक *एक्स* में आर, *य* = *एफ* ( *एक्स* ) = *ए* + *कुल्हाड़ी* + *कुल्हाड़ी* 2 + ...+ *ए एक्स एन ,* कहां *एन* है ए गैर नकारात्मक

0 1 2 *एन*

पूर्णांक और *ए* , *ए* , *ए* ,..., *ए* ∈ आर.

0 1 2 *एन*

कार्य परिभाषित द्वारा *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* 3 – *एक्स* 2 + 2, और *जी* ( *एक्स* ) = *एक्स* 4 +

*एक्स* हैं कुछ उदाहरण

2



2

का बहुपद कार्य, जबकि समारोह *एच* परिभाषित द्वारा *एच* ( *एक्स* ) = बहुपद समारोह.( *क्यों* ?)

3 + 2 *एक्स* है नहीं ए

उदाहरण 13 फलन *f* : R → R को *y = f* ( *x* ) = *x* 2 *, x* ∈ R द्वारा परिभाषित करें। पूरा करें मेज़ दिया गया नीचे द्वारा का उपयोग करते हुए यह परिभाषा। क्या है कार्यक्षेत्र और श्रेणी का यह समारोह? खींचना ग्राफ का *एफ* ।

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | – 4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *य* = *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

समाधान पुरा होना मेज़ है दिया गया नीचे:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | – 4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *य* = *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* 2 | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

कार्यक्षेत्र का *एफ* = { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर}. श्रेणी का *एफ* = { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर}। ग्राफ का *एफ* है दिया गया द्वारा अंजीर 2.10



*2*

अंजीर 2.10

34 गणित

उदाहरण 14 खींचना ग्राफ का समारोह *एफ* :आर → आर परिभाषित द्वारा *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* 3 , *एक्स* ∈ आर.

समाधान हम पास होना

*च* (0) = 0, *च* (1) = 1, *एफ* (-1) = -1, *च* (2) = 8, *एफ* (-2) = -8, *च* (3) = 27; *एफ* (-3) = -27, वगैरह।

इसलिए, *एफ* = {( *एक्स* , *एक्स* 3 ): *एक्स* ∈ आर}. ग्राफ का *एफ* है दिया गया में अंजीर 2.11.





अंजीर 2.11

1. तर्कसंगत कार्य हैं कार्य का प्रकार

*एफ* ( *एक्स* ) , कहाँ *एफ* ( *एक्स* ) और *जी* ( *एक्स* ) हैं

*जी* ( *एक्स* )

बहुपद कार्य का *एक्स* परिभाषित में ए कार्यक्षेत्र, कहाँ *जी* ( *एक्स* ) ≠ 0.

उदाहरण 15 परिभाषित करना असली महत्वपूर्ण समारोह *एफ* : आर – {0} → आर परिभाषित द्वारा

*एफ* ( *एक्स* ) = 1 *,*

*एक्स* ∈ आर –{0}. पूरा मेज़ दिया गया नीचे का उपयोग करते हुए यह परिभाषा। क्या है कार्यक्षेत्र और श्रेणी का यह समारोह?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | -2 | –1.5 | -1 | –0.5 | 0.25 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
| 1  *य* = | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

समाधान पुरा होना तालिका द्वारा दी गई है

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | -2 | –1.5 | -1 | –0.5 | 0.25 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
| 1  *य* = | – 0.5 | – 0.67 | -1 | – 2 | 4 | 2 | 1 | 0.67 | 0.5 |

रिश्ते और कार्य 35

 कार्यक्षेत्र है सभी असली नंबर के अलावा 0 और इसका श्रेणी है भी सभी असली नंबर के अलावा 0. ग्राफ का *एफ* है दिया गया में अंजीर 2.12.



अंजीर 2.12

1. मॉड्यूलस फ़ंक्शन फ़ंक्शन *एफ* : आर → आर परिभाषित द्वारा *एफ* ( *एक्स* ) = | *एक्स* | के लिए प्रत्येक *x* ∈ R को *मापांक फलन कहा जाता है* । प्रत्येक के लिए गैर नकारात्मक कीमत का *एक्स* , *एफ* ( *एक्स* ) है बराबर को *एक्स* ।



लेकिन के लिए नकारात्मक मान का *एक्स* , कीमत का

*एफ* ( *एक्स* ) है नकारात्मक का कीमत का *एक्स,* अर्थात,

*एफ* ( *एक्स* ) =  *एक्स , एक्स* ≥ 0

 *एक्स,एक्स* < 0



ग्राफ का मापांक समारोह है दिया गया में अंजीर 2.13.

1. पासवर्ड समारोह समारोह

*एफ* :आर → आर परिभाषित द्वारा

अंजीर 2.13

*एफ* ( *एक्स* )

 1 *,* मैं एफ *एक्स* > 0

 0 *,* मैं एफ *एक्स* = 0

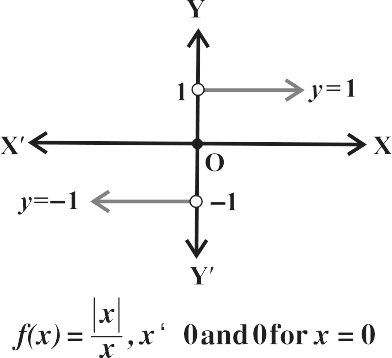


 − 1 अगर \_ *एक्स* < 0



36 गणित

है बुलाया *पासवर्ड समारोह* । कार्यक्षेत्र का पासवर्ड समारोह है आर और श्रेणी है तय करना {–1, 0, 1}. ग्राफ का पासवर्ड समारोह है दिया गया द्वारा अंजीर 2.14.



1. महानतम पूर्णांक समारोह कार्यक्रम *एफ* : आर → आर परिभाषित *f* ( *x* ) = [ *x* ], *x* ∈ R द्वारा मानता है कीमत का महानतम पूर्णांक, कम

बजाय या बराबर को *एक्स* । ऐसा ए समारोह है बुलाया *महानतम पूर्णांक समारोह।*

से परिभाषा का [ *एक्स* ], हम कर सकना देखना वह

[ *एक्स* ] =-1 1 के लिए ≤ *एक्स* < 0

[ *एक्स* ] = 0 के लिए 0 ≤ *एक्स* < 1

[ *एक्स* ] = 1 के लिए 1 ≤ *एक्स* < 2

[ *एक्स* ] = 2 के लिए 2 ≤ *एक्स* < 3 और

इसलिए पर।

ग्राफ का समारोह है दिखाया में अंजीर 2.15.

अंजीर 2.14



अंजीर 2.15



* + 1. *वास्तविक कार्यों का बीजगणित* इस अनुभाग में, हम सीखेंगे कि दो वास्तविक को कैसे जोड़ा जाए फ़ंक्शन, एक वास्तविक फ़ंक्शन को दूसरे से घटाएं, एक वास्तविक फ़ंक्शन को एक अदिश से गुणा करें (यहाँ द्वारा ए अदिश हम अर्थ ए असली संख्या), गुणा दो असली कार्य और विभाजित करना एक असली समारोह द्वारा एक और।

1. दो वास्तविक कार्यों का जोड़ मान लीजिए *f* : X → R और *g* : X → R कोई दो वास्तविक हैं कार्य, कहाँ एक्स ⊂ आर। तब, हम परिभाषित करना ( *एफ* + *जी* ): एक्स → आर द्वारा

( *एफ* + *जी* ) ( *एक्स* ) = *एफ* ( *एक्स* ) + *जी* ( *एक्स* ), के लिए सभी *एक्स* ∈ एक्स।

रिश्ते और कार्य 37

1. एक वास्तविक फलन को दूसरे मान लीजिए *f* : X → R और *g* : X → R से घटाना कोई दो असली कार्य, कहाँ एक्स आर। तब, हम परिभाषित करना ( *एफ* – *जी* ) : एक्स → आर द्वारा ( *एफ* - *जी* ) ( *एक्स* ) = *एफ* ( *एक्स* ) – *जी* ( *एक्स* ), के लिए सभी *एक्स* ∈ एक्स।
2. एक अदिश से गुणन मान लीजिए कि *f* : X → R एक वास्तविक मान वाला फलन है और α एक है अदिश. यहाँ द्वारा अदिश, हम अर्थ ए असली संख्या। तब उत्पाद α *एफ* है ए समारोह से एक्स को आर परिभाषित द्वारा ( α *एफ* ) ( *एक्स* ) = α *एफ* ( *एक्स* ), *एक्स* ∈ एक्स.
3. दो वास्तविक फलनों का गुणन दो वास्तविक फलनों का गुणनफल (या गुणन)। कार्य *f* :X → R और *g* :X → R एक फ़ंक्शन है *एफजी* :एक्स → आर परिभाषित द्वारा ( *एफजी* ) ( *एक्स* ) = *एफ* ( *एक्स* ) *जी* ( *एक्स* ), के लिए सभी *एक्स* ∈ एक्स।

यह है भी बुलाया *बिंदुवार गुणन.*

1. भागफल का दो असली कार्य होने देना *एफ* और *जी* होना दो असली कार्य परिभाषित से

*एफ*

एक्स → आर, कहां एक्स आर. का भागफल *एफ* द्वारा *जी* द्वारा निरूपित *जी* है ए फ़ंक्शन परिभाषित द्वारा ,

*g*

 

 *एफ*  ( *एक्स* ) = *एफ* ( *एक्स* )

  *जी* ( *एक्स* ) , प्रदान किया *जी* ( *एक्स* ) ≠ 0, *एक्स* ∈ एक्स

उदाहरण 16 होने देना *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* और *जी* ( *एक्स* ) = 2 *एक्स* + 1 होना दो असली कार्य.ढूंढें

2

( *एफ* + *जी* ) ( *एक्स* ), ( *एफ* - *जी* ) ( *एक्स* ), *(एफजी* ) ( *एक्स* ),  *एफ*  ( ) .

 

*g* 

समाधान हम पास होना,

2

( *एफ* + *जी* ) ( *एक्स* ) = *एक्स*

+ 2 *एक्स* + 1, ( *एफ* - *जी* ) ( *एक्स* ) = *एक्स*

2

– 2 *एक्स* – 1,

( *एफजी* ) ( *एक्स* ) = *एक्स*

2

(2 *एक्स* + 1) = 2 *एक्स*

3

+ *एक्स* ,

2

 *एफ*  ( )

*g*  =

 

2 *एक्स* + 1 , *एक्स* ≠ − 1

2

2

उदाहरण 17 होने देना *एफ* ( *एक्स* ) =  और *जी* ( *एक्स* ) = *एक्स* होना दो कार्य परिभाषित ऊपर तय करना का न

 *एफ* 

नकारात्मक असली नंबर. खोजो ( *एफ* + *जी* ) ( *एक्स* ), ( *एफ* – *जी* ) ( *एक्स* ), ( *एफजी* ) ( *एक्स* ) और  

*g*

 

( *एक्स* )।

समाधान हम पास होना

( *एफ* + *जी* ) ( *एक्स* ) = + *एक्स* , ( *एफ* – *जी* ) ( *एक्स* ) *=*  - *एक्स* ,

3 \_ *एफ* 

*एक्स*  1

( *एफजी* ) *एक्स* =

*एक्स( एक्स )*  *x* 2

और

 ( ) = *एक्स*

 

*g*

2 *, एक्स* ≠ 0

38 गणित

EXERCISE 2.3

1. कौन का अगले रिश्ते हैं कार्य? देना कारण. अगर यह है ए समारोह, ठानना इसका कार्यक्षेत्र और श्रेणी।

(मैं) {(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)}

(ii) {(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10.5), (12,6), (14,7)}

(iii) {(1,3), (1,5), (2,5)}.

1. खोजो कार्यक्षेत्र और श्रेणी का अगले असली कार्य:

(मैं) *एफ* ( *एक्स* ) = – (ii) *एफ* ( *एक्स* ) = .

9

2

1. एक फ़ंक्शन *f को f* ( *x* ) = 2 *x* -5 द्वारा परिभाषित किया गया है । के मान लिखिए ( *अगर* (0), (ii) *एफ* (7), (iii) *एफ* (-3).
2. समारोह ' *टी* ' कौन एमएपीएस तापमान में डिग्री सेल्सीयस में तापमान में

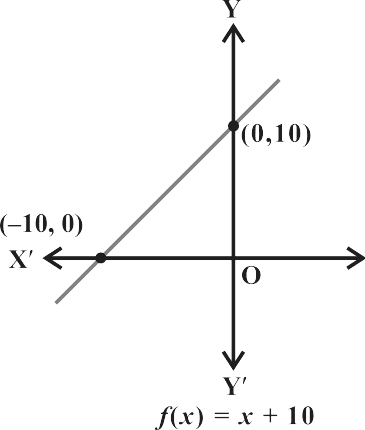
9

डिग्री फ़ारेनहाइट परिभाषित किया गया द्वारा *टी* (सी) = 5 +32.

खोजें (i) *टी* (0) (ii) *t* (28) (iii) *t* (-10) (iv) मूल्य C का, जब *t* (C) = 212.

1. खोजो श्रेणी का प्रत्येक का अगले कार्य. (मैं) *एफ* ( *एक्स* ) = 2 – 3 *एक्स, एक्स* ∈ आर *, एक्स* > 0.
   1. *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* 2 + 2 *, एक्स* है ए असली संख्या।
   2. *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* , *एक्स* है ए असली संख्या।

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 18 होने देना आर होना तय करना का असली नंबर.

परिभाषित करना असली समारोह

*एफ* : आर → आर द्वारा *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* + 10 और स्केच ग्राफ का यह समारोह।

समाधान यहाँ *च* (0) = 10, *च* (1) = 11, *च* (2) = 12, ...,

*च* (10) = 20, वगैरह।, और

*एफ* (-1) = 9, *एफ* (-2) = 8, ..., *एफ* (-10) = 0 और इसलिए पर।

इसलिए, आकार का ग्राफ का दिया गया समारोह मान लिया गया है रूप जैसा दिखाया में अंजीर 2.16.

*टिप्पणी*  समारोह *एफ* परिभाषित द्वारा *एफ* ( *एक्स* ) = *एमएक्स* + *सी , एक्स* ∈ आर, है बुलाया *रेखीय समारोह* , कहाँ *एम* और *देखभाल* \_ स्थिरांक ऊपर समारोह है एक उदाहरण का ए *रेखीय*

*समारोह* । अंजीर 2.16

रिश्ते और कार्य 39

उदाहरण 19 होने देना आर होना ए रिश्ता से क्यू को क्यू परिभाषित द्वारा आर = {( *ए* , *बी* ): *ए* , *बी* ∈ क्यू और

*ए* – *बी* ∈ Z}. दिखाओ वह

* + 1. ( *ए* , *ए* ) ∈ आर के लिए सभी *ए* ∈ क्यू
    2. ( *ए* , *बी* ) ∈ आर तात्पर्य वह ( *बी* ० *ए* ) ∈ आर
    3. ( *ए* , *बी* ) ∈ आर और ( *बी* , *सी* ) ∈ आर का तात्पर्य है वह ( *ए* , *सी* ) ∈ आर

समाधान (i) तब से, *ए* – *ए* = 0 ∈ Z, यदि अनुसरण करता है कि *एक* , *ए* ) ∈ आर।

1. ( *ए* , *बी* ) ∈ आर तात्पर्य वह *ए* – *बी* ∈ जेड इसलिए, *बी* – *ए* ∈ जेड इसलिए, ( *बी* , *ए* ) ∈ आर
2. ( *ए* , *बी* ) और ( *बी* , *सी* ) ∈ आर तात्पर्य वह *ए* – *बी* ∈ जेड *बी* – *सी* ∈ जेड इसलिए,

*ए* – *सी =* ( *ए – बी* ) *+* ( *बी – सी* ) ∈ जेड इसलिए, ( *एसी* ) *\_* \_ ∈ आर

उदाहरण 20 होने देना *एफ* = {(1,1), (2,3), (0, –1), (-1, -3)} होना ए रेखीय समारोह से जेड में जेड खोजो *एफ* ( *एक्स* ).

समाधान तब से *एफ* है ए रेखीय समारोह, *एफ* ( *एक्स) = एमएक्स + सी।* भी, तब से (1, 1), (0 *,* - 1) ∈ आर,

*एफ* (1) = *एम* + *सी* = 1 और *एफ* (0) = *सी* = -1. यह देता है *एम* = 2 और *एफ* ( *एक्स* ) = 2 *एक्स* – 1.

उदाहरण 21 खोजें का डोमेन समारोह *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स*

2

2

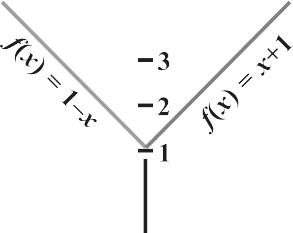
3 *एक्स* + 5

5 *एक्स* + 4

समाधान तब से *एक्स* -5 *एक्स* + 4 = ( *एक्स* – 4) ( *एक्स* –1), समारोह *एफ* है परिभाषित के लिए सभी असली नंबर के अलावा पर *एक्स* = 4 और *एक्स* = 1. इस तरह कार्यक्षेत्र का *एफ* है आर – {1, 4}.

2

उदाहरण 22 समारोह *एफ* है परिभाषित द्वारा



1 − \_



*, एक्स* < 0

*एफ* ( *एक्स* ) =  1 *एक्स* 0





खींचना ग्राफ का *एफ* ( *एक्स* )।

1 *, एक्स* > 0

समाधान यहाँ, *एफ* ( *एक्स* ) = 1 – *एक्स* , *एक्स* < 0, यह देता है

*एफ* (- 4) = 1 – (- 4) = 5;

*एफ* (- 3) =1 – (- 3) = 4,

*एफ* (- 2) = 1 – (- 2) = 3

*एफ* (-1) = 1 – (-1) = 2; वगैरह,

और *च* (1) = 2, *च* (2) = 3, *एफ* (3) = 4

*च* (4) = 5 और इसलिए पर इसके लिए *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* + 1, *एक्स* > 0. इस प्रकार, ग्राफ का *एफ* है जैसा दिखाया में अंजीर 2.17

अंजीर 2.17

40 गणित

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 2

1. रिश्ता *एफ* है परिभाषित द्वारा

  *x* 2 *,* 0 ≤ *एक्स* ≤ 3

*एफ* ( *एक्स* ) = 

  3 *एक्स ,* 3 ≤ *एक्स* ≤ 10

  *x* 2 , 0 ≤ *एक्स* ≤ 2

रिश्ता *जी* है परिभाषित द्वारा *जी* ( *एक्स* ) =   3 *एक्स* , 2 ≤ *एक्स* ≤ 10 दिखाएँ वह *एफ* है एक समारोह और *जी* है नहीं एक समारोह।



1. अगर *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* , खोजो

2

*एफ* ( *11* ) *– एफ* (1) .

( *11* \_ *–* 1)

= *एक्स* 2 + 2 *एक्स* + 1

1. खोजो कार्यक्षेत्र का समारोह *एफ* ( *एक्स* )

*एक्स* 2 *–* 8 *एक्स* +12 \_ .

1. खोजो कार्यक्षेत्र और श्रेणी का असली समारोह *एफ* परिभाषित द्वारा *एफ* ( *एक्स* ) = .

(*x* 1)

1. खोजो डोमेन और रेंज असली का फ़ंक्शन *एफ* परिभाषित *एफ* द्वारा( *एक्स* ) = *एक्स* 1 .

   *x* 2   

1. होने देना

*एफ* =   *एक्स* , 1 + *एक्स* 2  : *एक्स* ∈ आर  होना ए समारोह से आर में \_ \_ आर । ठानना \_ श्रेणी

का *एफ* ।

     

1. होने देना *एफ* , *जी* : आर → आर होना परिभाषित, क्रमश: द्वारा *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* + 1, *जी* ( *एक्स* ) = 2 *एक्स* – 3. खोजो

*एफ*

*एफ* + *जी, एफ – जी* और *जी* .

1. होने देना *एफ* = {(1,1), (2,3), (0,-1), (-1, -3)} होना ए समारोह से जेड को जेड परिभाषित द्वारा

*एफ* ( *एक्स* ) = *कुल्हाड़ी* + *बी,* के लिए कुछ पूर्णांकों *ए* , *बी* । ठानना *ए* , *बी* ।

1. होने देना आर होना ए रिश्ता से एन को एन परिभाषित द्वारा आर = {( *ए* , *बी* ) : *ए* , *बी* ∈ एन और *ए* = *बी* }. हैं अगले सत्य?

2

* 1. ( *ए* , *ए* ) ∈ आर, के लिए सभी *ए* ∈ एन (ii) ( *ए* , *बी* ) ∈ आर, तात्पर्य ( *बी* ० *ए* ) ∈ आर

(iii) ( *ए* , *बी* ) ∈ आर, ( *बी* , *सी* ) ∈ आर तात्पर्य ( *a* , *c* ) ∈ आर।

औचित्य आपका उत्तर में प्रत्येक मामला।

10. होने देना ए ={1,2,3,4}, बी = {1,5,9,11,15,16} और *एफ* = {(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)}

हैं अगले सत्य?

(मैं) *एफ* है ए रिश्ता एक से को बी (ii) *एफ* है ए समारोह से ए को बी। औचित्य आपका उत्तर में प्रत्येक मामला।

रिश्ते और कार्य 41

1. चलो *एफ* Z का उपसमुच्चय बनें *×* ज़ेड *परिभाषित f =* {( *ab* , द्वारा ) *एक* + *बी* ) : *ए* , *बी* ∈ Z}. *च* हैए समारोह से जेड को ज़ेड? औचित्य आपका उत्तर।
2. होने देना ए = {9,10,11,12,13} और होने देना *एफ* : ए → एन होना परिभाषित द्वारा *एफ* ( *एन* ) = उच्चतम मुख्य कारक का *एन* । खोजो श्रेणी का *एफ* ।

*सारांश*

में यह अध्याय, हम अध्ययन के बारे में रिश्ते और कार्य.द मुख्य विशेषताएँ का यह अध्याय हैं जैसा इस प्रकार है:

* + *आदेश दिया जोड़ा* ए जोड़ा का तत्वों वर्गीकृत किया एक साथ में ए विशिष्ट आदेश देना।
  + *काटीज़ियन उत्पाद* ए × बी का दो सेट ए और बी है दिया गया द्वारा ए × बी = {( *ए* , *बी* ): *ए* ∈ ए, *बी* ∈ बी}

में विशिष्ट आर × आर = {( *एक्स* , *य* ): *एक्स* , *य* ∈ आर}

और आर × आर × आर = {( *एक्स* , *हाँ* , *z* ): *एक्स* , *हाँ* , *जेड* ∈ आर}

* + अगर ( *ए* , *बी* ) = ( *एक्स* , *य* ), तब *ए* = *एक्स* और *बी* = *वाई*
  + अगर *एन* (ए) = *पी* और *एन* (बी) = *क्यू* , तब *एन* (ए × बी) = *पी क्यू* ।
  + ए × φ = φ
  + में सामान्य, ए × बी ≠ बी × एक।
  + *संबंध* एक समुच्चय A से समुच्चय B तक का संबंध R कार्तीय का एक उपसमुच्चय है उत्पाद ए × बी प्राप्त किया द्वारा का वर्णन ए संबंध बीच में पहला तत्व *एक्स* और दूसरा तत्व *य* का आदेश दिया जोड़े में ए × बी।
  + *छवि* का एक तत्व *एक्स* अंतर्गत ए रिश्ता आर है दिया गया द्वारा *हाँ* , कहाँ ( *एक्स* , *य* ) ∈ आर,
  + *कार्यक्षेत्र* का आर है तय करना का सभी पहला तत्वों का आदेश दिया जोड़े में ए रिश्ता आर।
  + *श्रेणी* का रिश्ता आर है तय करना का सभी दूसरा तत्वों का आदेश दिया जोड़े में ए रिश्ता आर।
  + *समारोह* ए फ़ंक्शन *एफ* से एक सेट ए एक सेट के लिए बी एक विशिष्ट प्रकार है के लिए संबंध का कौन प्रत्येक तत्व *x* का तय करना ए है एक और केवल एक छवि *य* में तय करना बी।

हम लिखना *एफ* : ए → बी, कहाँ *एफ* ( *एक्स* ) = *य* .

* + ए है कार्यक्षेत्र और बी है कोडोमेन का *एफ* ।

42 गणित

* The range of the function is the set of images.
* A real function has the set of real numbers or one of its subsets both as its domain and as its range.
* *Algebra of functions* For functions *f* : X → R and *g* : X → R, we have (*f* + *g*) (*x*) = *f* (*x*) + *g*(*x*), *x* ∈ X

(*f* – *g*) (*x*) = *f* (*x*) – *g*(*x*), *x* ∈ X

(*f*.*g*) (*x*) = *f* (*x*) .*g* (*x*), *x* ∈ X

(*kf*) (*x*) = *k* ( *f* (*x*) ), *x* ∈ X, where *k* is a real number.

 *f*  ( ) = *f* (*x*) , *x* ∈ X, *g*(*x*) ≠ 0

 *g* 

 

*g* (*x*)

*Historical Note*

The word FUNCTION first appears in a Latin manuscript “Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus” written by Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) in 1673; Leibnitz used the word in the non-analytical sense. He considered a function in terms of “mathematical job” – the “employee” being just a curve.

On July 5, 1698, Johan Bernoulli, in a letter to Leibnitz, for the first time deliberately assigned a specialised use of the term *function* in the analytical sense. At the end of that month, Leibnitz replied showing his approval.

*Function is found in English in 1779 in* Chambers’ Cyclopaedia: “The term function is used in algebra, for an analytical expression any way compounded of a variable quantity, and of numbers, or constant quantities”.

— **�** —

अध्याय 3

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

*एक गणितज्ञ किसी समस्या को हल करना जानता है, वह कर सकना नहीं हल करना यह। – मिलन* �

#### परिचय

शब्द 'त्रिकोणमिति' है व्युत्पन्न से यूनानी शब्द ' *त्रिकोण* ' और ' *मेट्रॉन* ' और यह मतलब 'मापना दोनों पक्ष का एक त्रिकोण'। विषय मूल रूप से हल करने के लिए विकसित किया गया था त्रिभुजों से जुड़ी ज्यामितीय समस्याएं। द्वारा इसका अध्ययन किया गया नेविगेशन के लिए समुद्री कप्तान, नया नक्शा तैयार करने के लिए सर्वेक्षक भूमि, इंजीनियरों और अन्य लोगों द्वारा। वर्तमान में, त्रिकोणमिति है भूकंप विज्ञान जैसे कई क्षेत्रों में उपयोग किया जाता है, डिज़ाइन बनाना इलेक्ट्रिक सर्किट, का वर्णन राज्य का एक परमाणु, समुद्र में ज्वार की ऊंचाई की भविष्यवाणी करना, विश्लेषण करना म्यूजिकल सुर और में अनेक अन्य क्षेत्र.

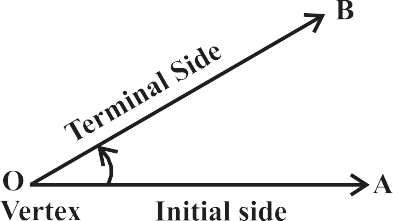
पिछली कक्षाओं में हमने त्रिकोणमिति का अध्ययन किया है अनुपात का तीव्र एंगल्स जैसा अनुपात का दोनों पक्ष का ए सही

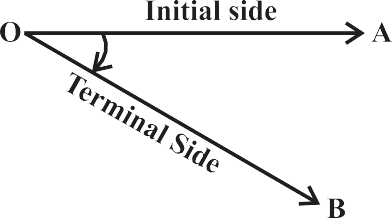
आर्य भट्ट (476-550)

कोणीय त्रिभुज. हमने त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं और अनुप्रयोग का भी अध्ययन किया है ऊंचाई और दूरियों से संबंधित समस्याओं को हल करने में त्रिकोणमितीय अनुपात। इस में अध्याय, हम इच्छा सामान्यीकरण अवधारणा का त्रिकोणमितीय अनुपात को त्रिकोणमितीय कार्य और अध्ययन उनका गुण।

#### एंगल्स

कोण है ए उपाय का ROTATION का ए दिया गया रे के बारे में इसका प्रारंभिक बिंदु। मूल रे है





Vertex

अंजीर 3.1

44 गणित

*प्रारंभिक पक्ष* कहलाता है और घूर्णन के बाद किरण की अंतिम स्थिति कहलाती है *टर्मिनल ओर* का कोण। बिंदु का ROTATION है बुलाया *शीर्ष* . अगर दिशा का ROTATION है वामा व्रत, कोण है कहा को होना सकारात्मक और अगर दिशा का ROTATION है दक्षिणावर्त, तब कोण है *नकारात्मक* (अंजीर 3.1).

कोण की माप किसकी मात्रा होती है? ROTATION प्रदर्शन किया को पाना टर्मिनल ओर से प्रारंभिक ओर। वहाँ हैं अनेक इकाइयां के लिए

माप कोण. परिभाषा का एक कोण

अंजीर 3.2

एक इकाई का सुझाव देता है, अर्थात। प्रारंभिक पक्ष की स्थिति से *एक पूर्ण क्रांति* बताए गए में अंजीर 3.2.



यह है अक्सर सुविधाजनक के लिए बड़ा कोण. के लिए उदाहरण, हम कर सकना कहना वह ए तेज़ी से कताई पहिया है निर्माण एक कोण का कहना 15 क्रांति प्रति दूसरा। हम करेगा वर्णन करना कोण की माप की दो अन्य इकाइयाँ जो सबसे अधिक उपयोग की जाती हैं, अर्थात्। डिग्री उपाय और कांति उपाय।

 1  टी एच

* + 1. *डिग्री उपाय* अगर ए ROTATION से प्रारंभिक ओर को टर्मिनल ओर है  360  का

 

ए क्रांति, कोण है कहा को पास होना ए उपाय का एक *डिग्री* , लिखा हुआ जैसा 1°. ए डिग्री है अलग करना में 60 मिनट, और ए मिनट है अलग करना में 60 सेकंड . एक साठवाँ का ए डिग्री है बुलाया ए *मिनट* , लिखा हुआ जैसा 1 ′ , और एक साठवाँ का ए मिनट है बुलाया ए *दूसरा* , लिखा हुआ जैसा 1 ″ .

इस प्रकार, 1° = 60 ′ , 1 ′ = 60 ″

कुछ का एंगल्स किसका पैमाने हैं 360°,180°, 270°, 420°, – 30°, – 420° हैं

दिखाया में अंजीर 3.3.

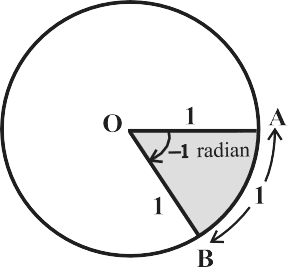
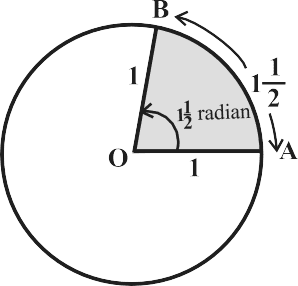
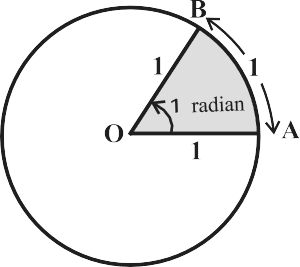


अंजीर 3.3

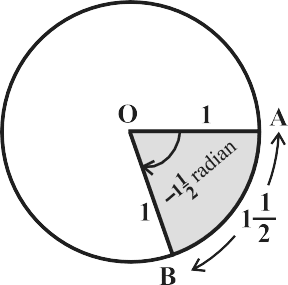
त्रिकोणमिति कार्य 45

* + 1. *रेडियन माप* किसी कोण को मापने की एक और इकाई होती है, जिसे कहते हैं *कांति* उपाय। कोण घटाया गया पर केंद्र द्वारा एक आर्क का लंबाई 1 इकाई में ए इकाई वृत्त (1 इकाई त्रिज्या वाला वृत्त) की माप 1 रेडियन मानी जाती है। चित्र में 3.4(i) को (iv), ओए है प्रारंभिक ओर और ओबी है टर्मिनल ओर। आंकड़ों दिखाओ

11 \_

एंगल्स किसका पैमाने हैं 1 कांति, -1 कांति, 1 2 कांति और -1 2 रेडियन.

* + - 1. (ii) (iii)

(iv)

अंजीर 3.4 (मैं) को (iv)

हम जानना वह परिधि का ए घेरा का RADIUS 1 इकाई है 2 π . इस प्रकार, एक पूरा क्रांति का प्रारंभिक ओर घटाता है एक कोण का 2 π रेडियन.

अधिक आम तौर पर, में ए घेरा का RADIUS *आर* , एक आर्क का लंबाई *आर* इच्छा नीचे फैलाना एक कोण का

1 रेडियन. यह है अच्छी तरह से-ज्ञात वह बराबर आर्क्स का ए घेरा नीचे फैलाना बराबर कोण पर केंद्र।

चूंकि त्रिज्या के एक वृत्त में *आर* , लंबाई का एक चाप *आर* एक को घटाता है कोण जिसका माप है 1

*एल*

कांति, एक आर्क का लंबाई *एल* इच्छा नीचे फैलाना एक कोण किसका उपाय रेडियन है . इस प्रकार, अगर में

ए घेरा का RADIUS *आर* , एक आर्क का लंबाई *एल* घटाता है एक कोण θ कांति पर केंद्र, हम पास होना

θ = *एल* या *एल* = *आर* θ .

46 गणित

* + 1. *रेडियन और वास्तविक संख्याओं के बीच संबंध* विचार करना इकाई घेरा साथ केंद्र ओ होने देना ए होना कोई बिंदु वृत्त पर. OA को एक कोण की प्रारंभिक भुजा मानें। तब लंबाई का एक आर्क का घेरा इच्छा देना कांति उस कोण का माप जिस पर चाप अंतरित होगा वृत्त का केंद्र. रेखा PAQ पर विचार करें जो है A पर वृत्त की स्पर्शरेखा। मान लीजिए कि बिंदु A, का प्रतिनिधित्व करता है असली संख्या शून्य, एपी का प्रतिनिधित्व करता है सकारात्मक असली संख्या और AQ ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं को दर्शाता है (चित्र 3.5)। हम अगर रस्सी रेखा एपी में वामा व्रत दिशा साथ में घेरा, और अक में दक्षिणावर्त दिशा, तब प्रत्येक असली संख्या इच्छा अनुरूप को ए कांति उपाय और इसके विपरीत। इस प्रकार, कांति पैमाने और असली नंबर कर सकना होना माना जैसा एक और वही।

पी 2

**1**

1

**A**

**ओ 0**

 **1**

 **2**

अंजीर 3.5 **प्र**

* + 1. *रिश्ता बीच में डिग्री और कांति* तब से ए घेरा घटाता है पर केंद्र एक कोण किसका कांति उपाय है 2 π और इसका डिग्री उपाय है 360°, यह इस प्रकार वह

2 π कांति = 360° या π कांति = 180°

ऊपर रिश्ता सक्षम बनाता है हम को अभिव्यक्त करना ए कांति उपाय में शर्तें का डिग्री उपाय और ए डिग्री उपाय में शर्तें का कांति उपाय। का उपयोग करते हुए अनुमानित कीमत

*22*

का π जैसा

*7* , हम पास होना

1 कांति =

180

*π* = 57° 16 ′ लगभग।

साथ ही 1° = 180 कांति = 0.01746 कांति लगभग।

रिश्ता बीच में डिग्री पैमाने और कांति उपाय का कुछ सामान्य एंगल्स हैं दिया गया में अगले मेज़:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| डिग्री | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
| कांति | 6 | 4 | 3 | 2 | *π* | 3 *π*  2 | 2 *π* |

त्रिकोणमिति कार्य 47

#### सांकेतिक सम्मेलन

चूँकि कोणों को या तो डिग्री या रेडियन में मापा जाता है, इसलिए हम इस परिपाटी को अपनाते हैं कि जब भी हम कोण θ ° लिखते हैं तो हमारा अभिप्राय उस कोण से होता है जिसका अंश माप θ और होता है जब कभी भी हम लिखना कोण β , हम अर्थ कोण किसका कांति उपाय है β .

टिप्पणी वह कब एक कोण है व्यक्त में रेडियंस, शब्द 'रेडियन' है बार-बार

छोड़ा गया. इस प्रकार, = *180* ° *और π* = *45* ° हैं लिखा हुआ साथ समझ वह π और *π*

4 4

हैं कांति पैमाने। इस प्रकार, हम कर सकना कहना वह

कांति उपाय = 180 × डिग्री उपाय

180

डिग्री उपाय = रेडियन उपाय

उदाहरण 1 बदलना 40° 20 ′ में कांति उपाय।

समाधान हम जानना वह 180° = π रेडियन.

अत: 40° 20 ′ = 4 0

1

3 डिग्री = 180

121 *π*

#### 121

3 रेडियन =

121

540 रेडियन.

इसलिए 40° 20 ′ =

540 रेडियन.

उदाहरण 2 बदलना 6 रेडियंस में डिग्री उपाय।

समाधान हम जानना वह π कांति = 180°.

अतः 6 रेडियंस =

180

*π* 6 डिग्री =

#### 7

1080 7

22 डिग्री

#### 7 × 60

= 343 11 डिग्री = 343° +11 मिनट \_ [जैसा 1° = 60 ' ]

#### 2

= 343° + 38 ′ + 11 मिनट [जैसे 1 ′ = 60 ″ ]

= 343° + 38 ′ + 10.9 ″ = 343°38 ′ 11 " लगभग।

अतः 6 रेडियंस = 343° 38 ′ 11 ″ लगभग.

उदाहरण 3 खोजो RADIUS का घेरा में कौन ए केंद्रीय कोण का 60° अवरोध एक

आर्क का लंबाई 37.4 सेमी (उपयोग *π* = 22 ).

7

48 गणित

60 *π*

समाधान यहाँ *एल* = 37.4 सेमी और θ = 60° =

एडियन = *π*

*एल*

इसलिए, द्वारा *आर* = *θ* , हम पास होना

*आर* = 37.4×3 = 37.4×3×7

*π 22*

180 3

= 35.7 सेमी

उदाहरण 4 एक घड़ी की मिनट की सुई 1.5 सेमी लंबी है। इसकी नोक कितनी दूर तक जाती है 40 मिनट? (उपयोग π = 3.14).

समाधान में 60 मिनट, मिनट हाथ का ए घड़ी पूरा करता है एक क्रांति। इसलिए,

#### 2

में 40 मिनट, मिनट हाथ मोड़ों के माध्यम से 3 का ए क्रांति। इसलिए,

*θ =* 2

3

360°

4

या 3 रेडियन. इस तरह, आवश्यक यात्रा की दूरी है दिया गया द्वारा

*एल* = *आर* θ = 1.5 × 4

3

सेमी = 2 π सेमी = 2 × 3.14 सेमी = 6.28 सेमी।

उदाहरण 5 अगर आर्क्स का वही लंबाई में दो मंडलियां नीचे फैलाना एंगल्स 65° और 110° पर केंद्र, खोजो अनुपात का उनका त्रिज्या.

समाधान होने देना *आर 1* और *र 2* होना त्रिज्या का दो वृत्त. दिया गया वह

θ = 65° = *π* 65

1 180

13

= 36

कांति

और θ 2

*अनुकरणीय*

= 110° = 180

× 110 = 22

36

कांति

होने देना *एल* होना लंबाई का प्रत्येक का चाप. तब *एल* = *आर* θ = *आर* θ , कौन देता है

1 1 2 2

13 22

#### 1 22

36 × *आर 1* = 36 × *र 2* , अर्थात।,

=

2 13

इसलिए *आर* 1 : *आर* 2 = 22 : 13.

EXERCISE 3.1

1. निम्नलिखित डिग्री मापों के अनुरूप रेडियन माप ज्ञात कीजिए: (मैं) 25° (ii) – 47°30 ′ (iii) 240° (iv) 520°

त्रिकोणमिति कार्य 49

2 . खोजो डिग्री पैमाने संगत को अगले कांति पैमाने

(उपयोग

(मैं)

*π* = 22 ).

7

#### 11

16 (ii) – 4 (iii)

5 7

3 (iv) 6

1. ए पहिया बनाता है 360 क्रांतियों में एक मिनट। के माध्यम से कैसे अनेक रेडियंस करता है यह मोड़ में एक दूसरा?
2. खोजो डिग्री उपाय का कोण घटाया गया पर केंद्र का ए घेरा का

RADIUS 100 सेमी द्वारा एक आर्क का लंबाई 22 सेमी (उपयोग *π*

22

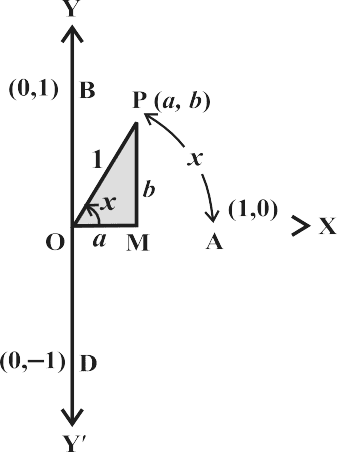
7 ).

1. में ए घेरा का व्यास 40 सेमी, लंबाई का ए तार है 20 सेमी। खोजो लंबाई का नाबालिग आर्क का राग.
2. अगर में दो वृत्त, आर्क्स का वही लंबाई नीचे फैलाना एंगल्स 60° और 75° पर केंद्र, खोजो अनुपात का उनका त्रिज्या.
3. खोजो कोण में कांति के माध्यम से कौन ए लंगर झूलों अगर इसका लंबाई है 75 सेमी और वां इ बख्शीश का वर्णन करता है एक आर्क का लंबाई
   1. 10 सेमी (ii) 15 सेमी (iii) 21 सेमी

#### त्रिकोणमितीय कार्य

में पहले कक्षाएं, हम पास होना अध्ययन त्रिकोणमितीय अनुपात के लिए तीव्र एंगल्स जैसा अनुपात का एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ। अब हम त्रिकोणमिति की परिभाषा का विस्तार करेंगे अनुपात को कोई कोण में शर्तें का कांति उपाय और अध्ययन उन्हें जैसा त्रिकोणमितीय कार्य.

केंद्र वाले एक इकाई वृत्त पर विचार करें पर मूल का कोआर्डिनेट कुल्हाड़ियाँ होने देना P ( *a, b* ) वृत्त पर कोई बिंदु हो कोण एओपी = *एक्स* कांति, अर्थात, लंबाई का आर्क एपी = *एक्स* (अंजीर 3.6).



हम cos *x* = *a* और syn *x* = *b को परिभाषित करते हैं* तब से ∆ ओएमपी है ए सही त्रिकोण, हम पास होना ॐ 2 + एमपी 2 = ओपी 2 या *एक* 2 + *बी* 2 = 1

इस प्रकार, के लिए प्रत्येक बिंदु पर इकाई घेरा, हम पास होना

*एक 2* + *बी 2* = 1 या क्योंकि 2 *एक्स* + पाप 2 *एक्स* = 1 तब से एक पूरा क्रांति

घटाता है एक कोण का 2 π कांति पर

केंद्र का घेरा, ∠ एओबी = 2 , अंजीर 3.6

50 गणित

∠ एओसी = π और ∠ एओडी = 3

2

. सभी एंगल्स कौन हैं अभिन्न गुणकों का 2

हैं बुलाया

*चतुर्भुज कोण* . COORDINATES का अंक ए, बी, सी और डी हैं, क्रमश, (1, 0), (0, 1), (-1, 0) और (0, -1)। इसलिए, चतुर्भुज कोणों के लिए, हमारे पास है

ओल 0° = 1 पाप 0° = 0,

*पी पी*

ओल

2 = 0 पाप 2 = 1

क्योंकि पी = − 1 पाप पी = 0

ओल

3 *π*

2 = 0 शेष

3

2 = -1

इसलिए 2 π = 1 पाप 2 π = 0

अब, अगर हम लेना एक पूरा क्रांति से बिंदु पी, हम दोबारा आना पीछे को वही बिंदु पी। इस प्रकार, हम भी निरीक्षण वह अगर *एक्स* बढ़ती है (या घट जाती है) द्वारा कोई अभिन्न एकाधिक का *2* π , मान का ज्या और कोज्या कार्य करना नहीं परिवर्तन। इस प्रकार,

पाप (2 *एन* π + *एक्स* ) = पाप , *एन* ∈ जेड , ओल (2 *एन* π + *एक्स* ) = ओल , *एन* ∈ जेड

आगे, पाप *एक्स* = 0, अगर *एक्स* = 0, ± π , ± 2 π , ± 3 π , ..., अर्थात, कब *एक्स* है एक अभिन्न एकाधिक का π

और ओल *एक्स* = 0, यदि = ± 2 , ±

*π*

3

2 , ±

5

2 , ... अर्थात, ओल *एक्स* गायब हो जाती कब *एक्स* है एक विषम

एकाधिक का 2 . इस प्रकार

पाप *एक्स* = 0 तात्पर्य *एक्स* = *एन* **π ,** कहाँ *एन* है कोई पूर्णांक

ओल *एक्स* = 0 तात्पर्य *एक्स* = ( *2एन* + 1) 2 , कहाँ *एन* है कोई पूर्णांक.

हम अब परिभाषित करना अन्य त्रिकोणमितीय कार्य में शर्तें का ज्या और कोज्या कार्य:

#### 1

कोसेक *एक्स* = *में*  , *एक्स* ≠ *एन* π , कहाँ *एन* है कोई पूर्णांक.

#### 1

सेकंड *एक्स*  = *ओल* , *एक्स* ≠ (2 *एन* + 1) 2 , कहाँ *एन* है कोई पूर्णांक.

*में*

टैन *एक्स*  = *सह*  , *एक्स* ≠ (2 *एन* +1) 2 , कहाँ *एन* है कोई भी पूर्णांक.

*हे*

खाट *एक्स*  = *पाप एक्स* , *एक्स* ≠ *एन* π , कहाँ *एन* है कोई पूर्णांक.

त्रिकोणमिति कार्य 51

हमने यह सब सच करके दिखाया है *एक्स* , पाप 2 *एक्स* + क्योंकि 2 *एक्स* = 1 यह इस प्रकार वह

1 + तन 2 *एक्स* = सेकंड 2 *एक्स*  (क्यों?)

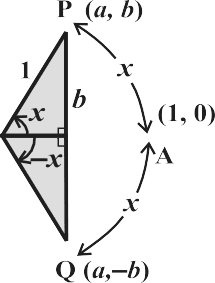
1 + खाट 2 *एक्स* = कोसेक 2 *एक्स* (क्यों?)

पिछली कक्षाओं में, हमने 0° के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों पर चर्चा की है। 30°, 45°, 60° और 90°. मान का त्रिकोणमितीय कार्य के लिए इन एंगल्स हैं वही जैसा कि पिछली कक्षाओं में पढ़ा गया त्रिकोणमितीय अनुपात है। इस प्रकार, हमारे पास निम्नलिखित है मेज़:



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0° | *अनुकरणीय*  6 | *अनुकरणीय*  4 | *अनुकरणीय*  3 | *अनुकरणीय*  2 |  | 3  2 | 2 *बजे* |
| पाप | 0 | 1  2 | 1  2 | 3  2 | 1 | 0 | – 1 | 0 |
| ओल | 1 | 3  2 | 1  2 | 1  2 | 0 | – 1 | 0 | 1 |
| टैन | 0 | 1  3 | 1 | 3 | नहीं परिभाषित | 0 | नहीं परिभाषित | 0 |

*x* , sec *x* और cot *x* का मानहैं पारस्परिक का मान का पाप *एक्स* , ओल *एक्स* और टैन *एक्स* , क्रमश।



* + 1. *त्रिकोणमितीय फलनों का चिह्न* होने देना पी ( *ए, बी* ) होना ए बिंदु पर इकाई घेरा साथ केंद्र पर मूल ऐसा वह

∠ एओपी = *एक्स* । अगर ∠ एओक्यू = – *एक्स* , तब

COORDINATES का बिंदु क्यू इच्छा होना ( *ए* , - *बी* ) (अंजीर 3.7). इसलिए

ओल (- *एक्स* ) = ओल *एक्स*

और पाप (- *एक्स* ) = – पाप *एक्स*

तब से के लिए प्रत्येक बिंदु पी ( *ए, बी* ) पर

इकाई घेरा, – 1 ≤ *ए* ≤ 1 और चित्र 3.7

52 गणित

– 1 ≤ *b* ≤ 1, हमारे पास सभी *x के लिए - 1* ≤ cos *x* ≤ 1 और -1 ≤ syn *x* ≤ 1 है । हम में सीखा है पहले का कक्षाओं वह में पहला वृत्त का चतुर्थ भाग (0 < *एक्स* < 2 ) *ए* और *बी* हैं दोनों सकारात्मक, में

दूसरा वृत्त का चतुर्थ भाग ( 2 < *एक्स* < π ) *ए* है नकारात्मक और *बी* है सकारात्मक, में तीसरा वृत्त का चतुर्थ भाग

( π < *एक्स* <

3

2 ) *ए* और *बी* हैं दोनों नकारात्मक और में चौथी वृत्त का चतुर्थ भाग (

3 *π*

2 < *एक्स* < 2 π ) *ए* है

सकारात्मक और *बी* नकारात्मक है। इसलिए, पाप *एक्स* 0 के लिए सकारात्मक है < *एक्स* < π , और के लिए नकारात्मक

अनुकरणीय < *एक्स* < दोपहर 2 बजे \_ वैसे ही, ओल *एक्स* है सकारात्मक के लिए 0 < *एक्स* < *अनुकरणीय* , नकारात्मक के लिए *अनुकरणीय* < *एक्स* < अपराह्न 3 *बजे*

और भी

2 2 2

3

सकारात्मक के लिए

2 < *एक्स* < 2 π . वैसे ही, हम कर सकना खोजो लक्षण का अन्य त्रिकोणमितीय

कार्य में अलग चतुर्थांश. में तथ्य, हम पास होना अगले मेज़।

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | मैं | द्वितीय | तृतीय | चतुर्थ |
| पाप *एक्स* | *+* | *+* | *–* | *–* |
| ओल *एक्स* | *+* | *–* | *–* | *+* |
| टैन *एक्स* | *+* | *–* | *+* | *–* |
| कोसेक *एक्स* | *+* | *+* | *–* | *–* |
| सेकंड *एक्स* | *+* | *–* | *–* | *+* |
| खाट *एक्स* | *+* | *–* | *+* | *–* |

* + 1. साइन की परिभाषा से *त्रिकोणमितीय कार्यों का डोमेन और रेंज* और कोज्या फलन, हम देखते हैं कि वे सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित हैं। आगे, हम निरीक्षण वह के लिए प्रत्येक असली संख्या *एक्स* ,

– 1 ≤ पाप *एक्स* ≤ 1 और – 1 ≤ ओल *एक्स* ≤ 1

इस प्रकार, कार्यक्षेत्र का *य* = पाप *एक्स* और *य* = ओल *एक्स* है तय करना का सभी असली नंबर और श्रेणी है अंतराल [–1, 1], यानी, – 1 ≤ *य* ≤ 1.

त्रिकोणमिति कार्य 53

1

तब से कोसेक *एक्स* = पाप , कार्यक्षेत्र का *य* = कोसेक *एक्स* है तय करना { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर और

*एक्स* ≠ *एन* π , *एन* ∈ जेड} और श्रेणी है तय करना { *य* : *य* ∈ आर, *य* ≥ 1 या *य* ≤ – 1}. इसी प्रकार, कार्यक्षेत्र

का *य* = सेकंड *एक्स* है तय करना { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर और *एक्स* ≠ (2 *एन* + 1) 2 , *एन* ∈ जेड} और श्रेणी है तय करना

{ *य* : *य* ∈ आर, *य* ≤ – 1या *य* ≥ 1}. कार्यक्षेत्र का *य* = टैन *एक्स* है तय करना { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर और

*एक्स* ≠ (2 *एन* + 1) 2 , *एन* ∈ जेड} और श्रेणी है तय करना का सभी असली नंबर. कार्यक्षेत्र का *य* = खाट *एक्स* है तय करना { *एक्स* : *एक्स* ∈ आर और *एक्स* ≠ *एन* π , *एन* ∈ जेड} और श्रेणी है तय करना का सभी असली नंबर.

हम आगे निरीक्षण वह में पहला चतुर्थांश, जैसा *एक्स* बढ़ती है से 0 को 2 , पाप *एक्स*

बढ़ती है से 0 को 1, जैसा *एक्स* बढ़ती है 2 से को π , पाप *एक्स* से घट जाती है 1 को 0. में

3 *π*

तीसरा चतुर्थांश, जैसा *एक्स* बढ़ती है से π को

1. , पाप *एक्स* कम हो जाती है से 0 को -1और अंत में, में

3

चौथी चतुर्थांश, पाप *एक्स* बढ़ती है से -1 को 0 जैसा *एक्स* बढ़ती है से 2 से 2 π .

इसी प्रकार, हम कर सकना चर्चा करना व्यवहार का अन्य त्रिकोणमितीय कार्य. में तथ्य, हम पास होना अगले मेज़:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | मैं चतुर्थांश | द्वितीय चतुर्थांश | तृतीय चतुर्थांश | चतुर्थ वृत्त का चतुर्थ भाग |
| पाप | बढ़ती है से 0 को 1 | कम हो जाती है से 1 को 0 | कम हो जाती है से 0 को -1 | बढ़ती है से -1 को 0 |
| ओल | कम हो जाती है से 1 को 0 | कम हो जाती है से 0 को – 1 | बढ़ती है से -1 को 0 | बढ़ती है से 0 को 1 |
| टैन | बढ़ती है से 0 को ∞ | बढ़ती है से – ∞ से 0 | से बढ़ता है 0 को ∞ | बढ़ती है से – ∞ से 0 |
| खाट | कम हो जाती है से ∞ को 0 | कम हो जाती है से 0 को– ∞ | कम हो जाती है से ∞ को 0 | कम हो जाती है से 0से – ∞ |
| सेकंड | बढ़ती है से 1 को ∞ | बढ़ती है से – ∞ से–1 | – 1 से – ∞ तक घट जाती है | कम हो जाती है से ∞ को 1 |
| कोसेक | कम हो जाती है से ∞ को 1 | बढ़ती है से 1 को ∞ | बढ़ती है से – ∞ से–1 | कम हो जाती है से–1से– ∞ |

*टिप्पणी* में ऊपर मेज़, कथन टैन *एक्स* बढ़ती है से 0 को ∞ (अनंत) के लिए 0 < *एक्स* < 2 केवल मतलब वह टैन *एक्स* बढ़ती है जैसा *एक्स* बढ़ती है के लिए 0 < *एक्स* < 2 और

54 गणित

मान लिया गया है मनमाने ढंग से बड़ा सकारात्मक मान जैसा *एक्स* पहुँच होना 2 . इसी प्रकार, को कहना वह कोसेक *एक्स* कम हो जाती है से -1 को – ∞ (शून्य से) अनंत) में चौथी वृत्त का चतुर्थ भाग मतलब वह

3

कोसेक *एक्स* कम हो जाती है *एक्स* के लिए∈ ( 2 , 2 π ) और मान लेता है मनमाने ढंग से बड़ा नकारात्मक के रूप में मान

*x* 2 π के करीब पहुंचता है । प्रतीक ∞ और - ∞ बस कुछ प्रकार के व्यवहार निर्दिष्ट करें का कार्य और चर।

हम पास होना पहले से देखा वह मान का पाप *एक्स* और ओल *एक्स* दोहराता बाद एक मध्यान्तर का 2 π . इस तरह, मान का कोसेक *एक्स* और सेकंड *एक्स* इच्छा भी दोहराना बाद एक मध्यान्तर का 2 π . हम

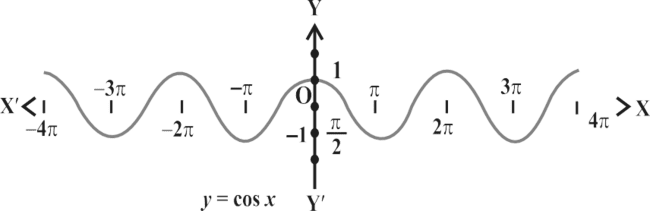
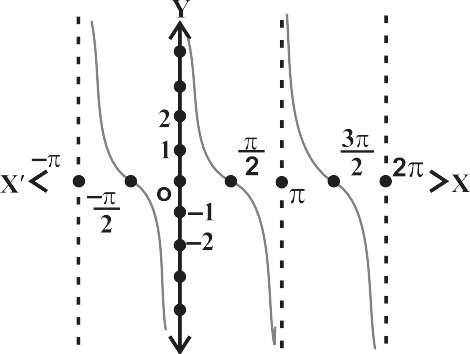
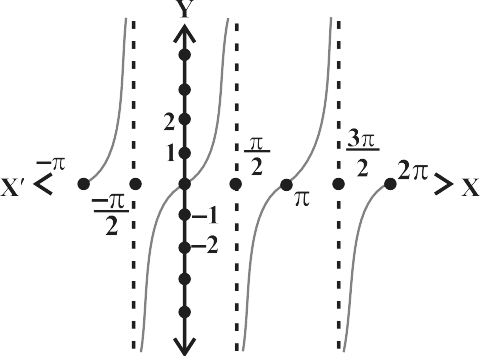
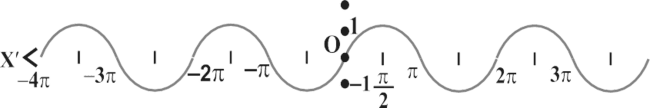


Fig 3.8

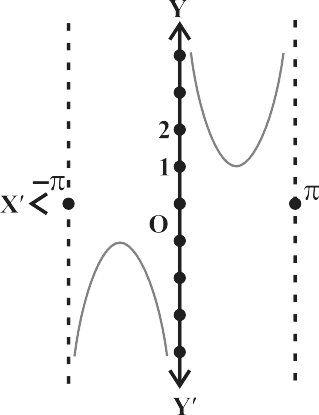
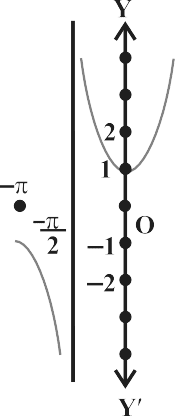
Fig 3.9

अंजीर 3.10 चित्र 3.11



त्रिकोणमिति कार्य 55







चित्र 3.12 चित्र 3.13

अगले भाग में देखेंगे कि tan ( π + *x* ) = tan *x* . इसलिए, tan *x का मान* दोहराया जाएगा बाद एक मध्यान्तर का π . तब से खाट *एक्स* है पारस्परिक का टैन *एक्स* , इसका मान इच्छा भी दोहराना बाद π का अंतराल . त्रिकोणमितीय कार्यों के इस ज्ञान और व्यवहार का उपयोग करके, हम कर सकते हैं स्केच करें ग्राफ यहाँ इन कार्य. लेखाचित्र का इन कार्य हैं दिया गया ऊपर:

उदाहरण 6 अगर ओल *एक्स* = – 3 , *एक्स* झूठ में तीसरा चतुर्थांश, खोजो मान का अन्य पाँच

5

त्रिकोणमितीय कार्य.

3

समाधान तब से ओल *एक्स* = 5

, हम पास होना सेकंड *एक्स* = − 5

3

अब पाप 2 *एक्स* + क्योंकि 2 *एक्स* = 1, अर्थात, पाप 2 *एक्स* = 1 – क्योंकि 2 *एक्स*

या पाप 2 *एक्स* = 1 – 9 25

इसलिए पाप *एक्स* = ± 4 5

16

= 25

तब से *एक्स* झूठ में तीसरा चतुर्थांश, पाप *एक्स* है नकारात्मक। इसलिए

4

पाप *एक्स* = – 5

कौन भी देता है

5

कोसेक *एक्स* = – 4

56 गणित

आगे, हम पास होना

*मैं*  4 *ओ*  3

टैन *एक्स* = *क्योंकि*  =

5

1. और खाट *एक्स* =

*में*  = 4 .

उदाहरण 7 अगर खाट *एक्स* = – 12 , *एक्स* झूठ में दूसरा चतुर्थांश, खोजो मान का अन्य पाँच त्रिकोणमितीय कार्य.

समाधान तब से खाट *एक्स =* – 5 , हम पास होना टैन *एक्स* = – 12

12

अब सेकंड 2 *एक्स* = 1 + तन 2 *एक्स* = 1 +

13

144

25 =

5

169

25

इसलिए सेक *एक्स* = ± 5

तब से *एक्स* झूठ में दूसरा चतुर्थांश, सेकंड *एक्स* इच्छा होना नकारात्मक। इसलिए

13

सेकंड *एक्स* = – 5 ,

कौन भी देता है

आगे, हम पास होना

ओल *एक्स*  − 5 13

12 5 12

पाप *एक्स* = टैन *एक्स* ओल *एक्स* = (-

5 ) × (- 13 ) = 13

1 13

और कोसेक *एक्स* = *पाप एक्स* = 12 .

31 *π*

उदाहरण 8 खोजो कीमत का पाप 3 .

समाधान हम जानना वह मान का पाप *एक्स* दोहराता बाद एक मध्यान्तर का 2 π . इसलिए

पाप

31 *π* 3

3 = पाप (10 π + 3 ) = पाप 3 = 2 .



त्रिकोणमिति कार्य 57

उदाहरण 9 खोजो कीमत का ओल (-1710°).

समाधान हम जानना वह मान का ओल *एक्स* दोहराता बाद एक मध्यान्तर का 2 π या 360°. इसलिए, क्योंकि (-1710°) = ओल (-1710° + 5 360°)

= ओल (-1710° + 1800°) = ओल 90° = 0.

EXERCISE 3.2

खोजो मान का अन्य पाँच त्रिकोणमितीय कार्य में अभ्यास 1 को 5.

#### 1

* 1. ओल *एक्स* = – 2 , *एक्स* में निहित है तीसरा चतुर्थांश.

#### 3

* 1. पाप *एक्स* = 5 , *एक्स* झूठ में दूसरा चतुर्थांश.

3

* 1. खाट *एक्स* = 4 , *एक्स* झूठ में तीसरा चतुर्थांश.

#### 13

* 1. सेकंड *एक्स* = 5 , *एक्स* में निहित है चतुर्थ चतुर्थांश.

#### 5

* 1. टैन *एक्स* = - 12 , *एक्स* झूठ में दूसरा चतुर्थांश.

खोजो मान का त्रिकोणमितीय कार्य में अभ्यास 6 को 10.

6. पाप 765° 7. कोसेक (- 1410°)

8. टैन

19 11

3 9. पाप (- 3 )

15 *π*

10. खाट (- 4 )

#### त्रिकोणमितीय कार्य का जोड़ और अंतर का दो एंगल्स

में यह अनुभाग, हम करेगा निकाले जाते हैं अभिव्यक्ति के लिए त्रिकोणमितीय कार्य का जोड़ और दो संख्याओं (कोणों) और संबंधित अभिव्यक्तियों का अंतर। इसमें मूल परिणाम कनेक्शन हैं बुलाया *त्रिकोणमितीय पहचान* . हम पास होना देखा वह

1. पाप (- *एक्स* ) = – पाप *एक्स*
2. ओल (- *एक्स* ) = ओल *एक्स*

हम करेगा अब सिद्ध करना कुछ अधिक परिणाम:

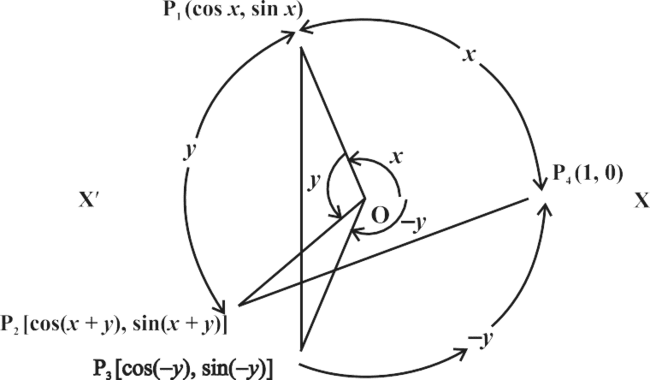
58 गणित

1. ओल ( *एक्स* + *और* ) = ओल *एक्स* ओल *और* – बिना *एक्स* बिना *और*

मूल बिंदु पर केंद्र वाले इकाई वृत्त पर विचार करें। माना *x* कोण P OP है और *आप* हो कोण P 1 OP 2 . तब ( *x* + *y* ) कोण P 4 OP 2 है । यह भी मान लीजिए कि (- *y* ) कोण P 4 OP 3 है । इसलिए, पी 1 , पी 2 , पी 3 और पी 4 इच्छा पास होना COORDINATES पी 1 (कोस *एक्स* , पाप *एक्स* ),

4 1

प्रश्न 2 [क्योंकि ( *एक्स* + *और* ), बिना ( *एक्स* + *और* )], प्रश्न 3 [क्योंकि (- *और* ), बिना (- *और* )] और प्रश्न 4 (1, 0) (अंजीर। 3.14).





अंजीर 3.14

विचार करना त्रिभुज पी 1 ओपी 3 और पी 2 ओपी 4 . वे हैं अनुकूल (क्यों?)। इसलिए, पी 1 पी 3 और पी 2 पी 4 हैं बराबर। द्वारा का उपयोग करते हुए दूरी सूत्र, हम पाना

पी 1 पी 3 2 = [क्योंकि *एक्स* – ओल (- *तथा* )] 2 + [बिना *एक्स* – पाप(– *और* ] 2

= (क्योंकि) *एक्स* – ओल *तथा* ) 2 + (बिना *एक्स* + बिना *तथा* ) 2

= क्योंकि 2 *एक्स* + क्योंकि 2 *य* – 2 ओल *एक्स* ओल *य* + पाप 2 *एक्स* + पाप 2 *य* + 2पाप *एक्स* पाप *य*

= 2 – 2 (क्योंकि) *एक्स* ओल *य* – पाप *एक्स* पाप *y* ) (क्यों?) साथ ही, पी 2 पी 4 2 = [1 – ओल ( *एक्स* + *y* )] 2 + [0 – पाप ( *एक्स* + *य* )] 2

= 1 – 2cos ( *एक्स* + *य* ) + क्योंकि 2 ( *एक्स* + *य* ) + पाप 2 ( *एक्स* + *य* )

= 2 – 2 ओल ( *एक्स* + *य* )

त्रिकोणमिति कार्य 59

चूंकि पी पी = पी पी , हम पास होना पी पी 2 = पी पी 2 .

1 3 2 4 1 3 2 4

इसलिए, 2 -2 (क्योंकि) *एक्स* ओल *य* – पाप *एक्स* पाप *य* ) = 2 – 2 ओल ( *एक्स* + *य* ). इस तरह ओल ( *एक्स* + *य* ) = ओल *एक्स* ओल *य* – पाप *एक्स* पाप *य*

1. . ओल ( *एक्स – और* ) *=* ओल *एक्स* ओल *और +* बिना *एक्स* बिना *और*

की जगह *य* द्वारा – *य* में पहचान 3, हम पाना

ओल ( *एक्स* + (- *और* )) = ओल *एक्स* ओल (- *और* ) – बिना *एक्स* बिना ( *- और* ) या क्योंकि ( *एक्स* – *और* ) = ओल *एक्स* ओल *और* + बिना *एक्स* बिना *और*

π

1. ओल ( 2 ) *=* पाप *एक्स*

*π*

अगर हम प्रतिस्थापित करें *एक्स* द्वारा 2 और *य* द्वारा *एक्स* में पहचान (4), हम पाना

ओल ( *π* - ) = ओल

2 2

*अनुकरणीय*

ओल *एक्स* + पाप 2

पाप *एक्स* = पाप *एक्स* ।

1. पाप ( ***अनुकरणीय*** – 2

) = ओल *एक्स*

का उपयोग करते हुए पहचान 5, हम पास होना



पाप ( *अनुकरणीय* − ) = ओल  *अनुकरणीय* −  *अनुकरणीय* −   = ओल *एक्स* ।

2 \_ 2 \_ 2 \_ \_

1. पाप ( *एक्स* + *य* ) = पाप *एक्स* ओल *य* + ओल *एक्स* पाप *य*

हम जानना वह

पाप ( *एक्स* + *)* \_ = ओल  *अनुकरणीय* − (

+ *)* \_  = ओल  ( *अनुकरणीय*

) − *य* 

 2  2 



 

= ओल ( *अनुकरणीय* − ) ओल *य* + पाप ( *अनुकरणीय*

) पाप *य*

2 2

= बिना *एक्स* ओल *और* + ओल *एक्स* बिना *और*

1. बिना ( *एक्स* – *और* ) = बिना *एक्स* ओल *और* – ओल *एक्स* बिना *और*

अगर हम प्रतिस्थापित करें *य* द्वारा – *हाँ* , में पहचान 7, हम पाना परिणाम।

1. द्वारा ले रहा उपयुक्त मान का *एक्स* और *य* में पहचान 3, 4, 7 और 8, हम पाना अगले परिणाम:

ओल

π

( + ) 2

= – पाप *एक्स*  पाप

अनुकरणीय

( + ) 2

= ओल *एक्स*

ओल ( **π** – *एक्स* ) = – ओल *एक्स*  पाप ( **π** – *एक्स* ) = पाप *एक्स*

60 गणित

ओल ( **पी** + *एक्स* ) = – ओल *एक्स*  पाप ( **पी** + *एक्स* ) = – पाप *एक्स*

ओल (2 **π** – *एक्स* ) = ओल *एक्स*  पाप (2 **π** – *एक्स* ) = – पाप *एक्स*

समान परिणाम के लिए टैन *एक्स* , खाट *एक्स* , सेकंड *एक्स* और कोसेक *एक्स* कर सकना होना प्राप्त किया से परिणाम का पाप

*एक्स* और ओल *एक्स* ।

1. अगर कोई नहीं का एंगल्स *एक्स* , *य* और ( *एक्स* + *य* ) है एक विषम एकाधिक का 2 , तब

तो + इसलिए *और*

इसलिए ( *एक्स* + *और* ) = 1 – इतना तो *और*

तब से कोई नहीं का *एक्स* , *य* और ( *एक्स* + *य* ) है एक विषम एकाधिक का 2 , यह इस प्रकार वह ओल *एक्स* , ओल *य* और ओल ( *एक्स* + *य* ) हैं शून्येतर. अब

*में(*  *y)*

*में सह आप भी*  *शामिल*  *हों य*

टैन ( *एक्स* + *य* ) = *क्योंकि( एक्स* + *य)*

= *cosx ओल य* − *पाप एक्स पाप y* .

डिवाइडिंग मीटर और भाजक द्वारा ओल *एक्स* ओल *हाँ* , हम पास होना

बिना *एक्स* ओल *और* + ओल *एक्स* बिना *और*

ओल *एक्स* ओल *और*  क्योंकि *एक्स* ओल *और*

इसलिए ( *एक्स* + *और* ) =

ओल *एक्स* ओल *और* − *एक्स* के बिनाबिना *और*

ओल *एक्स* ओल *और*  क्योंकि *एक्स* ओल *और*

इसलिए + तो *और*

= 1 – इसलिए इसलिए *और*

इसलिए - इसलिए *और*

1. इसलिए ( *एक्स* – *और* ) =

1 + इतना तो *और*

अगर हम प्रतिस्थापित करें *य* द्वारा – *य* में पहचान 10, हम पाना

इसलिए ( *एक्स* – *और* ) = इसलिए [ *एक्स* + (- *और* )]

इसलिए + इसलिए ( − *और* ) इतना तो *और*

= 1 - इसलिए इसलिए ( − *और* ) = 1+ \_ इसलिए इसलिए *और*

1. अगर कोई नहीं का एंगल्स *एक्स* , *य* और ( *एक्स* + *य* ) है ए एकाधिक का **π** , तब

खाट *एक्स* खाट *य* – 1

खाट ( *एक्स* + *य* ) =

खाट *य* +खाट *एक्स*

त्रिकोणमिति कार्य 61

तब से, कोई नहीं का *एक्स* , *य* और ( *एक्स* + *य* ) है एकाधिक का π , हम खोजो वह पाप *एक्स* पाप *य* और पाप ( *एक्स* + *य* ) हैं शून्येतर. अब,

खाट ( *एक्स* + *और* ) = ओल (

में (

*और* ) = ओल *एक्स* ओल *और* – बिना *एक्स* बिना *और*

+ *य* ) पाप *एक्स* ओल *य* + ओल *एक्स* पाप *य*

डिवाइडिंग मीटर और भाजक द्वारा पाप *एक्स* पाप *हाँ* , हम पास होना

खाट *एक्स* खाट *य* – 1

खाट ( *एक्स* + *य* ) =

1. खाट ( *एक्स* – *य* ) =

ओटी *य* + खाट *एक्स*

ओटी *एक्स* खाट *य* + 1 ओटी *य* – खाट *एक्स*

अगर कोई नहीं का एंगल्स *एक्स, य* और *एक्स-y* है ए एकाधिक का π

अगर हम प्रतिस्थापित करें *य* द्वारा - *y* में पहचान 12, हम पाना परिणाम

1. ओल 2 *एक्स* = क्योंकि 2 *एक्स* – पाप 2 *एक्स* = 2 क्योंकि 2 *एक्स* – 1 = 1 – 2 पाप 2 *एक्स* =

हम जानना वह

ओल ( *एक्स* + *य)* = ओल *एक्स* ओल *य* – पाप *एक्स* पाप *य*

की जगह *y* द्वारा *एक्स* , हम पाना

ओल 2 *एक्स* = क्योंकि 2 *एक्स* – पाप 2 *एक्स*

= क्योंकि 2 *एक्स* – (1 – क्योंकि 2 *एक्स* ) = 2 क्योंकि 2 *एक्स* – 1 फिर से, क्योंकि 2 *एक्स* = क्योंकि 2 *एक्स* – पाप 2 *एक्स*

= 1 – पाप 2 *एक्स* – पाप 2 *एक्स* = 1 – 2 पाप 2 *एक्स* ।

1 – तन 2

1 + तन 2

हम क्योंकि है 2 *एक्स* = क्योंकि 2 *एक्स* – पाप 2 *एक्स* =

ओएस 2 क्योंकि 2

− पाप 2 *एक्स*

+ पाप 2 *एक्स*

डिवाइडिंग मीटर और भाजक द्वारा क्योंकि 2 *एक्स* , हम पाना

1 – तन 2

ओल 2 *एक्स* = 1 + तन 2

, *एक्स* ≠ *nπ* + *π ,* कहाँ एन है एक पूर्णांक

2

1. पाप 2 *एक्स* = 2 पाप *एक्स* ओल *एक्स* =

हम पास होना

2tan

1 + तन 2

*एक्स* ≠ *एन π* + *,* कहाँ एन है एक पूर्णांक

2

बिना ( *एक्स* + *और* ) = बिना *एक्स* ओल *और* + ओल *एक्स* बिना *और*

की जगह *y को x* से , हम पाते हैं पाप 2 *x* = 2 पाप *x* क्योंकि *x* ।

2पाप ओल *एक्स*

फिर पाप 2 *एक्स* =

क्योंकि 2 *एक्स* + पाप 2 *एक्स*

62 गणित

डिवाइडिंग प्रत्येक अवधि द्वारा क्योंकि 2 *एक्स* , हम पाना

2tan

पाप 2 *एक्स* = 1 + तन 2

2tan

1. टैन 2 *एक्स* = 1 – तन 2

हम जानना वह

अगर 2 *एक्स*  *एनπ* + *,* कहाँ एन है एक पूर्णांक

2

टैन + टैन *वाई*

टैन ( *एक्स* + *य* ) = 1 तन *एक्स* टैन *य*

की जगह *य* द्वारा *एक्स* , हम पाना टैन 2 *एक्स* =

1. पाप 3 *एक्स* = 3 पाप *एक्स* – 4 पाप 3 *एक्स*

हम पास होना,

पाप 3 *एक्स* = पाप (2 *एक्स* + *एक्स* )

2 टैन

1 - तन 2

= पाप 2 *एक्स* ओल *एक्स* + ओल 2 *एक्स* पाप *एक्स*

= 2 पाप *एक्स* ओल *एक्स* ओल *एक्स* + (1 – 2पाप 2 *एक्स* ) पाप *एक्स*

= 2 पाप *x* (1 - पाप 2 *एक्स* ) + पाप *एक्स* – 2 पाप 3 *एक्स*

= 2 पाप *एक्स* - 2 पाप 3 *एक्स* + पाप *एक्स* - 2 पाप 3 *एक्स*

= 3 पाप *एक्स* – 4 पाप 3 *एक्स*

1. ओल 3 *एक्स* = 4 क्योंकि 3 *एक्स* – 3 ओल *एक्स*

हम पास होना,

ओल 3 *एक्स* = ओल (2 *एक्स* + *एक्स* )

= ओल 2 *एक्स* ओल *एक्स* – पाप 2 *एक्स* पाप *एक्स*

= (2कोस 2 *एक्स* – 1) ओल *एक्स* – 2पाप *एक्स* ओल *एक्स* पाप *एक्स*

= (2कोस 2 *एक्स* – 1) ओल *एक्स* – 2cos *एक्स* (1 – क्योंकि 2 *एक्स* )

= 2cos 3 *एक्स* – ओल *एक्स* – 2cos *एक्स* + 2 क्योंकि 3 *एक्स*

= 4cos 3 *एक्स* – 3cos *एक्स* ।

3 टैन - तन 3 *एक्स*

टैन 3 *एक्स* =

1 - 3 तन 2

अगर 3 *एक्स* ≠ *एन π* + *,* कहाँ एन है एक पूर्णांक

2

हम पास होना टैन 3 *एक्स* =तन (2 *एक्स* + *एक्स* )

टैन 2 तन *एक्स*

2tan *एक्स* + टैन

= 1 *-* तन 2 *एक्स*

=

1 तन 2x *\_* टैन *एक्स*

2tan *.* टैन *एक्स*

1 *–* 1 *–* तन 2 *एक्स*

त्रिकोणमिति कार्य 63

= 2tan + टैन *एक्स –* टैन 3 *एक्स* = 3 टैन *एक्स –* तन 3 *एक्स*

1 *–* तन 2 *एक्स –* 2तन 2 *एक्स*  1 *–* 3तन 2 *एक्स*

1. (मैं) ओल *एक्स* + ओल *य =*

2cos

+ *और* ओल *एक्स* – *और*

2 2

* 1. ओल *एक्स* – ओल *और = –*

2पाप

+ *और* बिना *एक्स* – *और*

2 2

* 1. पाप *एक्स* + पाप *य =*

2पाप

+ *य* ओल *एक्स* – *य*

* 1. पाप *एक्स* – पाप *y =*

हम जानना वह

2cos

2 2

+ *और* बिना *एक्स* – *और*

2 2

ओल ( *एक्स* + *और* ) = ओल *एक्स* ओल *और* – बिना *एक्स* बिना *और*  ... (1)

और क्योंकि ( *एक्स* – *य* ) = ओल *एक्स* ओल *य* + पाप *एक्स* पाप *आप*  ... (2) जोड़ा जा रहा है और घटाने (1) और (2), हम पाना

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ओल ( *एक्स* + *य* ) + क्योंकि( *x* – *य* ) = 2 ओल *एक्स* ओल *य* | ... (3) |
| और | ओल ( *एक्स* + *य* ) – ओल ( *एक्स* – *य* ) = *–* 2 पाप *एक्स* पाप *य* | ... (4) |
| आगे | बिना ( *एक्स* + *और* ) = बिना *एक्स* ओल *और* + ओल *एक्स* बिना *और* | ... (5) |
| और | बिना ( *एक्स* – *और* ) = बिना *एक्स* ओल *और* – ओल *एक्स* बिना *और* | ... (6) |

जोड़ा जा रहा है और घटाने (5) और (6), हम पाना

बिना ( *एक्स* + *और* ) + बिना ( *एक्स* – *और* ) = 2 बिना *एक्स* ओल *और*  ... (7)

बिना ( *एक्स* + *और* ) – बिना ( *एक्स* – *और* ) = 2cos *एक्स* बिना *और*  ... (8)

होने देना *एक्स* + *य* = θ और *एक्स* – *य* = φ . इसलिए

*एक्स* =  *मैं* + पीएचआई  और \_ *य* =  *मैं* − एफ 

 2   2 

   

स्थानापन्न मान का *एक्स* और *य* में (3), (4), (7) और (8), हम पाना

  

सी ओ एस मैं + ओल पीएचआई = 2 ओल  *मैं* + एफ  सी ओ एस  *मैं* − एफ 

 2   2 

ओल मैं – ओल पीएचआई = – 2 पाप  *मैं* + पीएचआई  पाप  *अगर* \_ 

2 \_   2 

पाप मैं + पाप पीएचआई = 2 पाप  *मैं*

  

पीएचआई  सी ओएस  *मैं* − एफ 

  

 2   2 

64 गणित

पाप मैं – पाप पीएचआई = 2 ओल

 *मैं* + पीएचआई  में है  *मैं* − एफ 

 2   2 

  

तब से θ और φ ले जा सकते हैं कोई वास्तविक मूल्य, हम कर सकना प्रतिस्थापित करें θ द्वारा *एक्स* और φ द्वारा *य* . इस प्रकार, हम पाना

ओल *एक्स* + ओल *और* = 2 ओल

*और* ओल *एक्स* − *और* ; ओल *एक्स* – ओल *और* = – 2 बिना

2 2

+ *और* बिना *एक्स* − *और* ,

2 2

बिना *एक्स* + बिना *और* = 2 बिना

+ *और* ओल *एक्स* − *और* ; बिना *एक्स* – बिना *और* = 2 ओल

2 2

+ *और* बिना *एक्स* − *और* .

2 2

*टिप्पणी* जैसा पहचान का एक हिस्सा 20 में दिया गया, हम निम्नलिखित परिणाम सिद्ध कर सकते हैं:

1. (यो) 2 ओल *एक्स* ओल *और* = ओल ( *एक्स* + *और* ) + ओल ( *एक्स* – *और* )
2. -2 बिना *एक्स* बिना *और* = ओल ( *एक्स* + *और* ) – ओल ( *एक्स* – *और* )
3. 2 बिना *एक्स* ओल *और* = बिना ( *एक्स* + *और* ) + बिना ( *एक्स* – *और* )
4. 2 ओल *एक्स* बिना *और* = बिना ( *एक्स* + *और* ) – बिना ( *एक्स* – *और* )। उदाहरण 10 सिद्ध करना वह

पी पी 5 पी पी

3sin सेकंड − 4sin खाट = 1

6 3 6 4

समाधान हम पास होना

एलएचएस = 3sin सेकंड अनुकरणीय − 4 पाप शाम 5 बजे खाट अनुकरणीय

6 3 6 4

1  पी 

= 3 ×× 2 – 4 पाप π− × 1= 3- 4 पाप



2   6

6

1

= 3 – 4 × 2 = 1 = आरएचएस

उदाहरण 11 खोजो कीमत का पाप 15°.

समाधान हम पास होना

बिना 15° = बिना (45° – 30°)

= बिना 45° ओल 30° - क्योंकि 45° बिना 30°

= × 3 − × 1 = .

2 2



1

2



1

2



3 *–* 1

2 2

उदाहरण 12 खोजो कीमत का टैन

13

12 .

त्रिकोणमिति कार्य 65

समाधान हम पास होना

टैन 13 π = टैन  π +

π 

= दस

= दस  π − π 

12 \_ \_ 

12 \_ 4 6 

 

दस π − दस π



1 - 1



3

3



3

= 4 6

= 3 =

− 1 = 2 -

1 + टैन टैन π

4 6

उदाहरण 13 सिद्ध करना वह

1 + 1+ \_ 1

3

समाधान हम पास होना

में (

में (

*य* ) = टैन *एक्स* + टैन *य*

– *य* ) तन *एक्स* − तन *य*

.

एलएचएस

= बिना ( *एक्स* + *और* ) = बिना *एक्स* ओल *और* + क्योंकि *एक्स* बिना *और*

में ( − *और* बिना \_ *एक्स* ओल *और* − क्योंकि *एक्स* बिना *और*

डिवाइडिंग मीटर और भाजक द्वारा ओल *एक्स* ओल *हाँ* , हम पाना

बिना ( + *और* ) = इसलिए *एक्स* + इसलिए *और* .

बिना ( − *इसलिए* \_ \_ *एक्स* − तो *और*

उदाहरण 14 दिखाओ वह

इसलिए 3 *एक्स* इसलिए 2 *एक्स* इसलिए *एक्स* = इसलिए 3x *\_* – इसलिए 2 *एक्स* – इसलिए *एक्स*

समाधान हम जानना वह 3 *एक्स* = 2 *एक्स* + *एक्स*

इसलिए, तन 3 *एक्स* = टैन (2 *एक्स* + *एक्स* )

टैन 3x *\_* = टैन 2 + टैन *एक्स*

1- टैन 2 टैन *एक्स*

or

या tan 3 *x* - tan 3 *x* tan 2 *x* tan *x* = tan 2 *x* + tan *x* या tan 3 *x* - tan 2 *x* - tan *x* = tan 3 *x* tan 2 *x* tan *x* या tan 3 *x* tan 2 *x* tan *x* = tan 3 *x* - tan 2 *x* - tan *x।* उदाहरण 15 सिद्ध करना वह

ओ एस  अनुकरणीय +  + सी ओ एस  अनुकरणीय − *एक्स*  =



2

ओल *एक्स*

 4 \_ \_ 4 \_

   

समाधान का उपयोग करना पहचान 20(i), हम पास होना

66 गणित

एलएचएस

= ओल  π +  + ओल  π − *एक्स* 

 4 \_ \_ 4 \_

   

 अनुकरणीय + + अनुकरणीय − *एक्स*   अनुकरणीय + *एक्स –* ( अनुकरणीय − *एक्स* ) 

= 2 कोस

4 4  क्योंकि \_  4 4 

2   2 

  

   



1

2



2

= 2 ओल 4 ओल *एक्स =* 2 ×

sin 7 *x* – sin 5*x*

उदाहरण 16 सिद्ध करना वह इसलिये 7 *एक्स* + ओल 5 *एक्स* = खाट

ओल *एक्स* =

ओल *एक्स* = आरएचएस

समाधान का उपयोग करते हुए पहचान 20 (मे एंड 20 (iv), हम पाना

2cos 7 + 5 *एक्स* ओल 7 *एक्स* − 5 *एक्स*  *ओएस*

एलएचएस =

2cos 7

2 2 =

+ 5 *एक्स* पाप 7 *एक्स* − 5 *x*  *इंच*

2 2

= *खाट एक्स* = आरएचएस

उदाहरण 17 सिद्ध करना वह

= पाप 5 *एक्स* 2पाप 3 *एक्स* + पाप *एक्स* = टैन

cos5 *x* − क्योंकि *एक्स*

समाधान हम पास होना

एलएचएस

= पाप 5 2पाप 3 *एक्स* + पाप *एक्स* = पाप 5 + पाप *एक्स* − 2पाप 3 *एक्स*

cos5 *x* − क्योंकि *x*  cos5 *x* − क्योंकि *एक्स*

= 2पाप 3 ओल 2 *x*  2 पाप 3 *एक्स* = *–* में 3 *एक्स* (क्योंकि) 2 *एक्स* 1)

– 2पाप 3 *एक्स* पाप 2 *एक्स*  पाप 3 *एक्स* पाप 2 *एक्स*

= 1 - क्योंकि 2 = 2पाप 2 *एक्स*

में 2 2पाप *एक्स* ओल *एक्स*

= टैन *एक्स* = आरएचएस

त्रिकोणमिति कार्य 67

सिद्ध करना वह:

EXERCISE 3.3

1. पाप 2

+ क्योंकि 2

– टैन 2  = 1

π

1. 2 पाप 2  + कोसेक 2

7 क्योंकि 2 π 3

6 3 4 2 6 6 3 2

1. खाट 2 अनुकरणीय + कोसेक शाम 5 बजे + 3 तन 2 अनुकरणीय = 6

4. 2पाप 2 3 + 2cos 2 π + 2 सेकंड 2 π = 10

6 6 6

1. खोजो कीमत का:
   1. पाप 75° (ii) टैन 15°

सिद्ध करना अगले:

4 4 3

1. सी ओ एस  π  सी ओ एस  अनुकरणीय − *य*  − हाँ न  अनुकरणीय −   अनुकरणीय − *य*  = हाँ न ( *एक्स* + *)* \_

*x* sin

 4 \_ \_ 4 \_ \_ 4 \_ \_ 4 \_

       

टैन  *अनुकरणीय* + *एक्स* 2 \_

  =

 4 \_ \_ 1 + तो 

7.  8.

ओल (

+ *एक्स* ) ओल ( - *एक्स* ) = खाट 2

π

टैन  *अनुकरणीय* − *एक्स*   1 − तन 

पाप ( पी − *एक्स* ) ओल 

+ *एक्स* 

 4 \_ \_ 2 \_

   

9 . सी ओ एस  3 *π* + *एक्स*  सी ओ एस ( 2 *π* + *एक्स )*  *सी ओ टी*  *3 π* − *एक्स*  + *सी ओ टी* *( 2 π* + *एक्स )*  = *1*

 2    2 \_ \_

     

10. पाप ( *एन* + 1) *एक्स* पाप ( *एन* + 2) *एक्स* + ओल ( *एन* + 1) *एक्स* ओल ( *एन* + 2) *एक्स* = ओल *एक्स*

11।

इसलिए  3 π +  − इसलिए  3 π − *एक्स*  = −

2 बाएं *एक्स*

 4 \_ \_ 4 \_

   

12. पाप 2 6 *एक्स* – पाप 2 4 *एक्स* = पाप 2 *एक्स* पाप 10 *x*  13. क्योंकि 2 2 *एक्स* – क्योंकि 2 6 *एक्स* = पाप 4 *एक्स* पाप 8 *एक्स*

1. पाप2 *एक्स* + 2 पाप 4 *एक्स* + पाप 6 *एक्स* = 4 क्योंकि 2 *एक्स* पाप 4 *एक्स*
2. खाट 4 *एक्स* (पाप 5 *एक्स* + पाप 3 *एक्स* ) = खाट *एक्स* (पाप 5 *एक्स* – पाप 3 *एक्स* )

*सह* 9

*सह* 5

= − *में* 2

*में* 5

*में* 3

= *टैन* 4x *\_*

*में* 17

*में* 3

*या* 10

*हे* 5 + *हे* 3

*मैं में*

*य* = *य\_*  *\_*

*मैं में* 3

= *टैन* 2 *एक्स*

*ओल एक्स* + *ओल y*  2 *सह*  + *सह* 3

*मैं*  *मैं* 3

= 2 *पाप एक्स*

*सह* 4

+ *सह* 3

+ *ओएस* 2

= *खाट* 3 *एक्स*

*में* 2

*सह* 2

*मैं* 4 *इंच* 3

*में* 2

68 गणित

1. खाट *एक्स* खाट 2 *एक्स* – खाट 2 *एक्स* खाट 3 *एक्स* – खाट 3 *एक्स* खाट *एक्स* = 1

4तन (1 − तन 2 *एक्स* )

टैन 4 *एक्स* =

1 − 6 तन 2

+ तन 4 *एक्स*

1. ओल 4 *एक्स* = 1 – 8पाप 2 *एक्स* क्योंकि 2 *एक्स*
2. ओल 6 *एक्स* = 32 क्योंकि 6 *एक्स* – 48cos 4 *एक्स* + 18 क्योंकि 2 *एक्स* – 1

*मिश्रित उदाहरण*

3

उदाहरण 18 अगर पाप *एक्स* = 5 , ओल *य* =

मूल्य ज्ञात करें पाप का ( *एक्स* + *य* ).

समाधान हम जानना वह

– 12 , कहाँ *एक्स* और *आप* दोनों झूठ में दूसरा चतुर्थांश,

13

बिना ( *एक्स* + *और* ) = बिना *एक्स* ओल *और* + ओल *एक्स* बिना *और*  ... (1)

अब क्योंकि 2 *एक्स* = 1 – पाप 2 *एक्स* = 1 –

इसलिए क्योंकि *एक्स* = ± 4 .

5

9 16

25 = 25

तब से *एक्स* झूठ में दूसरा चतुर्थांश, ओल *एक्स* है नकारात्मक।

इसलिए क्योंकि *x* = −4 \_ 5

अब पाप 2 *य* = 1 – क्योंकि 2 *वर्ष* = 1 –

हाँ पाप = ± 5 .

13

144

169

= 25

169

5

तब से *य* झूठ में दूसरा चतुर्थांश, इस तरह पाप *य* है सकारात्मक। इसलिए, पाप *य* = 13 . स्थानापन्न मूल्य का पाप *x* , पाप *y* , ओल *एक्स* और क्योंकि *य* में (1), हम पाना

3  12   4 5 \_

36 20 56

*बिना ( \_ \_* *एक्स* + *और )* = ×  −  +  −  ×

= − − = − .

5  13   5  13

उदाहरण 19 सिद्ध करो वह

65 65 65

ओल 2 *एक्स* ओल

समाधान हम पास होना

– ओल 3 *एक्स* ओल 9 *एक्स* = पाप 5 *एक्स* पाप 5 *एक्स* .

2 2 2

1

एलएचएस =

त्रिकोणमिति कार्य 69

 2 सीओएस \_ 2 सी ओएस *एक्स* − 2 सी ओएस 9 *एक्स* सी ओएस 3 *एक्स* 

2  2 2  

= 1  सी ओ एस  2 + *एक्स*  + सी ओएस  2 *एक्स* − *एक्स*  − सी ओ एस  9 *एक्स* + 3 *एक्स*  − सी ओ एस  9 *एक्स* − 3 *एक्स*  

2  2   2   2   2 \_ \_

        

1  5 *एक्स*

3 *x*  15 *x*

3 *एक्स* 1 \_  5 *एक्स*

15 *एक्स* 

= 2   *सी ओ एस* 2

+ *ओल*

2

* *ओल*

2

– *सी या एस* 2   = 2   *सी ओ एस* 2

* *ओल*

2  

  5 *एक्स* + 15 *एक्स*   5 *एक्स* − 15 *एक्स*  

1 − 2 पाप  2 2  पाप  2 2  

= 22 \_ \_

  2  

    

      



– *एन में एस* 5x *\_* *एन में एस*  −

=



5 *एक्स*  5 *एक्स*

 = *बिना* 5 *एक्स बिना*

2 2 \_

*π*

= आरएचएस

उदाहरण 20 खोजो कीमत का टैन 8 . . . .

समाधान होने देना *x*  8 . . . . तब 2 *एक्स*  \_ . . . .

2 *टा*

अब *तन* 2 *एक्स* =

1

*टैन* 2

टैन *π* =

या \_

2tan

8

1 − तन 2 *π*

8

2 *य*

होने देना *य* = टैन 8 . . . . तब 1 = 1 − *य* 2

या *y* 2 + 2 *य* – 1 = 0

2

इसलिए *य* =

−2 ± 2 2

2

= − 1 ±

70 गणित

तब से

*π*

8 प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, *य* = टैन 8 सकारात्मक है. इस तरह

टैन *π* = − 1 .



2

8

3 3 *π*

उदाहरण 21 अगर टैन *एक्स* = 4 , *π < एक्स <* 2 , खोजो कीमत का पाप 2 , ओल 2 और टैन 2 .

समाधान तब से *अनुकरणीय* < *एक्स* < 3

2

, ओल *एक्स* है नकारात्मक।

साथ ही *प* < *एक्स* < *3पी* .

2 2 4

इसलिए, पाप 2 है सकारात्मक और ओल 2 है नकारात्मक।

9 25

अब सेकंड 2 *एक्स* = 1 + तन 2 *एक्स* = 1 + =

16 16

16

अत: कॉस 2 *एक्स* =

25

या ओल *एक्स* =

4

5 (क्यों?)

अब 2 *पाप* 2

अत: पाप 2

2

4 9

= 1 – ओल *एक्स* = 1 + = .

2 5 5

9

= 10

3

या पाप 2 =

10

(क्यों?)

4 1

पुनः 2cos 2

2

अत: कॉस 2

2

= 1+ ओल *एक्स* = 1 − 5 = 5

1

= 10

1

10

या क्योंकि 2 = −

(क्यों?)

*पाप*

2

3 \_ −

त्रिकोणमिति कार्य 71

10 

तो तन 2 =

*एक्स*

*ओल*

2

= × 



10

 = – 3.

1 \_

उदाहरण 22 सिद्ध करो वह क्योंकि 2 *एक्स* + क्योंकि 2  *एक्स* + *π*  + क्योंकि 2  *एक्स* − *π*  = *3* .

3 \_  

3  2

   

समाधान हम पास होना

1+ \_ ओल  2 *एक्स* + 2 *π*  1+ \_ ओल  2 *एक्स* − *2π* 

1 + ओल 2 *एक्स*

3 \_   3 

एलएचएस = +   +   .

2 2 2

= 1  3 + सी ओएस 2 *एक्स* + सी ओएस  2 *एक्स* + 2  + सी ओएस  2 *एक्स* − *2 π*  

2  3   3  

    

= 1  3 + सी ओएस 2 *एक्स* + 2 सी ओएस 2 *एक्स* सी ओ एस 2 *π* 

2 3 \_  

= 1  3 + सी ओएस 2 *एक्स* + 2 सी ओएस 2 *एक्स* सी ओएस  *π* −  

3 



2    

= 1  3 + सी ओ एस 2 *एक्स* − 2 सी ओ एस 2 *एक्स* सी ओ एस *π* 

2 

= 1 [ 3 + ओल 2 *एक्स* − ओल 2 *एक्स* ] = 3

2 2

3  

= आरएचएस

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 3

सिद्ध करना वह:

1. 2 ओल *अनुकरणीय* ओल *रात* 9 बजे+ ओल अपराह्न 3 *बजे* + ओल शाम 5 *बजे* = 0

###### 13 13 13 13

1. (बिना 3x *\_* + *x* के बिना ) बिना *एक्स* + (क्योंकि) 3x *\_* – ओल *एक्स* ) ओल *एक्स* = 0

+ *और*

1. (क्योंकि) *एक्स* + ओल *य* ) 2 + (पाप *एक्स* – पाप *य* ) 2 = 4 क्योंकि 2 2

72 गणित

1. (क्योंकि) – ओल *तथा* ) 2 + (बिना – बिना *तथा* ) 2 = 4 बिना 2 *एक्स* − *और*

2

1. पाप *एक्स* + पाप 3 *एक्स* + पाप 5 *एक्स* + पाप 7 *एक्स* = 4 ओल *एक्स* ओल 2 *एक्स* पाप 4 *एक्स*

**6 .**  (पाप 7 *x* पाप 5 *एक्स* ) + (पाप 9 *एक्स* + पाप 3 *एक्स* ) (क्योंकि) 7 *एक्स* + ओल 5 *एक्स* ) + (क्योंकि) 9 *एक्स* + ओल 3 *एक्स* )

= टैन 6 *एक्स*

3

1. पाप 3 *एक्स* + पाप 2 *एक्स* - पाप *एक्स* = 4पाप *एक्स* ओल 2 ओल 2

खोजो पाप 2 , ओल 2 और टैन 2 में प्रत्येक का अगले :

1. टैन *एक्स* = − 4 , *एक्स* में वृत्त का चतुर्थ भाग द्वितीय 9. ओल *एक्स* = − 1 , *एक्स* में वृत्त का चतुर्थ भाग तृतीय

1

10. हाँ *एक्स* = 4

3 3

, *एक्स* में वर्ग द्वितीय

*Summary*

�If in a circle of radius *r*, an arc of length *l* subtends an angle of θ radians, then

*l = r* θ

�Radian measure = 180 Degree measure

�Degree measure =

�cos2 *x* + sin2 *x* = 1

�1 + tan2 *x* = sec2 *x*

180 ×

Radian measure

�1 + cot2 *x* = cosec2 *x*

�cos (2*n*π + *x*) = cos *x*

�sin (2*n*π + *x*) = sin *x*

�sin (– *x*) = – sin *x*

�cos (– *x*) = cos *x*

�cos (*x* + *y*) = cos *x* cos *y* – sin *x* sin *y*

�cos (*x – y*) *=* cos *x* cos *y +* sin *x* sin *y*

�cos ( 2 − ) *=* sin *x*

*π*

हाँ ( *π* - ) = ओल *एक्स*

�

2

� बिना ( *एक्स* + *और* ) = बिना *एक्स* ओल *और* + ओल *एक्स* बिना *और*

� पाप ( *एक्स* – *य* ) = पाप *एक्स* ओल *य* – ओल *एक्स* पाप *य*

त्रिकोणमिति कार्य 73

ओल  *अनुकरणीय* +  = – पाप *एक्स*  पाप  *अनुकरणीय* +  = ओल *एक्स*

*  2  2 



 

ओल ( पी – *एक्स* ) = – ओल *एक्स*  पाप ( पी – *एक्स* ) = पाप *एक्स*

ओल ( पी + *एक्स* ) = – ओल *एक्स*  पाप ( पी + *एक्स* ) = – पाप *एक्स*

ओल ( 2 π – *एक्स* ) = ओल *एक्स*  पाप ( 2 π – *एक्स* )= – पाप *एक्स*

� अगर कोई नहीं का एंगल्स *एक्स* , *य* और ( *एक्स* ± *य* ) है अजीब एकाधिक का 2 , तब

तन ता य

इसलिए ( *एक्स* + *और* ) = 1 - *इसलिए एक्स इसलिए और*

तो ता और

� तो ( *एक्स* – *और* ) = 1+ \_ *इसलिए एक्स इसलिए और*

� अगर कोई नहीं का एंगल्स *एक्स* , *य* और ( *एक्स* ± *य* ) है ए एकाधिक का π , तब

ओटी खाट *य* − 1

खाट ( *एक्स* + *य* ) =

� खटिया ( *एक्स* – *य* ) =

ओटी *य* + खाट *एक्स*

खाट *एक्स* खाट *य* +1 \_ खाट *य* − खाट *एक्स*

1 तन 2 *एक्स*

� क्योंकि 2 *एक्स* = क्योंकि 2 *एक्स* – पाप 2 *एक्स* = 2cos 2 *एक्स* – 1 = 1 – 2 पाप 2 *एक्स* = 1 + टैन 2

पाप 2x *\_* = 2 पाप *एक्स* ओल *एक्स* =

2 टैन

1 + टैन 2 *एक्स*

2tan

टैन 2x *\_* = 1 − तन 2

� पाप 3 *एक्स* = 3 पाप - 4पाप 3

� क्योंकि 3 *एक्स* = 4cos 3 - 3cos

74 गणित

3 tan − tan3 *x*

�tan 3*x* = 1−3 tan2

* (i) cos *x* + cos *y* = 2cos

+ *y*

2

cos

+ *y*

(ii) cos *x* – cos *y* = – 2sin 2

*x* − *y*

2

sin *x* − *y*

2

(iii)

sin *x* + sin *y* = 2 sin

*y*

cos *x* − *y*

2 2

(iv)

sin *x* – sin *y* = 2cos

*y* *x* − *y*

2

sin

2

* (i)

(ii)

(iii)

(iv)

2cos *x* cos *y* = cos (

+ *y*) + cos ( – *y*)

– 2sin *x* sin *y* = cos (*x* + *y*) – cos (*x* – *y*) 2sin *x* cos *y* = sin (*x* + *y*) + sin (*x* – *y*)

2 cos *x* sin *y* = sin (*x* + *y*) – sin (*x* – *y*).

*Historical Note*

The study of trigonometry was first started in India. The ancient Indian Mathematicians, Aryabhatta (476), Brahmagupta (598), Bhaskara I (600) and Bhaskara II (1114) got important results. All this knowledge first went from India to middle-east and from there to Europe. The Greeks had also started the study of trigonometry but their approach was so clumsy that when the Indian approach became known, it was immediately adopted throughout the world.

In India, the predecessor of the modern trigonometric functions, known as the sine of an angle, and the introduction of the sine function represents the main contribution of the *siddhantas* (Sanskrit astronomical works) to the history of mathematics.

Bhaskara I (about 600) gave formulae to find the values of sine functions for angles more than 90°. A sixteenth century Malayalam work *Yuktibhasa* (period) contains a proof for the expansion of sin (A + B). Exact expression for sines or cosines of 18°, 36°, 54°, 72°, etc., are given by Bhaskara II.

त्रिकोणमिति कार्य 75

The symbols sin–1 *x*, cos–1 *x*, etc., for arc sin *x*, arc cos *x*, etc., were suggested by the astronomer Sir John F.W. Hersehel (1813) The names of Thales (about 600 B.C.) is invariably associated with height and distance problems. He is credited with the determination of the height of a great pyramid in Egypt by measuring shadows of the pyramid and an auxiliary staff (or gnomon) of known height, and comparing the ratios:

H

S

*h*

= tan (sun’s altitude)

Thales is also said to have calculated the distance of a ship at sea through the proportionality of sides of similar triangles. Problems on height and distance using the similarity property are also found in ancient Indian works.

— **�** —

## अध्याय

76 MATHEMATICS

4

COMPLEX NUMBERS AND QUADRATIC EQUATIONS

गणित *है रानी का विज्ञान और अंकगणित है रानी का अंक शास्त्र। – गॉस* �

#### परिचय

में पहले कक्षाएं, हम पास होना अध्ययन रेखीय समीकरण में एक और दो चर और द्विघात समीकरण में एक चर। हमने देखा है कि समीकरण *x* 2 + 1 = 0 का कोई वास्तविक नहीं है *x* 2 + 1 = 0 के रूप में हल *x* 2 = - 1 और प्रत्येक का वर्ग देता है वास्तविक संख्या ऋणात्मक नहीं है. इसलिए, हमें इसका विस्तार करने की आवश्यकता है वास्तविक संख्या प्रणाली को एक बड़ी प्रणाली में बदलना ताकि हम कर सकें खोजो समाधान का समीकरण *एक्स* 2 = – 1. में तथ्य, मुख्य उद्देश्य है को हल करना समीकरण *कुल्हाड़ी* 2 + *बीएक्स* + *सी* = 0, कहाँ डी = *बी* 2 – 4 *ac* < 0, जो की प्रणाली में संभव नहीं है असली नंबर.

#### जटिल नंबर

डब्ल्यू आर। हैमिल्टन (1805-1865)

होने देना हम निरूपित



1

द्वारा प्रतीक *मैं* । तब, हम पास होना *मैं* 2

− 1 . यह मतलब वह *मैं* है ए

समाधान का समीकरण *एक्स* 2 + 1 = 0.

ए संख्या का रूप *ए* + *आईबी* , कहां *ए* और *बी* हैं असली संख्याएँ, है परिभाषित को होना ए

जटिल संख्या। के लिए उदाहरण, 2 + *मैं* 3, (- 1) +

, 4 + *मैं* 

1 

हैं जटिल नंबर.



*मैं*   11 

के लिए जटिल संख्या *जेड* = *ए* + *आईबी* , *ए* है बुलाया *असली भाग* , लक्षित द्वारा दोबारा *जेड* और



3

*बी* है बुलाया *काल्पनिक भाग* लक्षित द्वारा मैं हूँ *जेड का जटिल संख्या z* . के लिए उदाहरण, अगर *जेड* = 2 + *मैं* 5, तब दोबारा *जेड* = 2 और मैं हूँ *जेड* = 5.

दो जटिल नंबर *z* 1 = *ए* + *आईबी* और *z* 2 = *सी* + *पहचान* हैं बराबर अगर *ए* = *सी* और *बी* = *डी* ।

जटिल संख्याएँ और द्विघात समीकरण 77

उदाहरण 1 अगर 4 *एक्स* + *मैं* (3 *एक्स* – *य* ) = 3 + *मैं* (- 6), कहाँ *एक्स* और *य* हैं असली संख्याएँ, तब खोजो मान का *एक्स* और *य* .

समाधान हम पास होना

4 *एक्स* + *मैं* (3 *एक्स* – *य* ) = 3 + *मैं* (–6) ... (1)

बराबरी करना असली और काल्पनिक पार्ट्स का (1), हम पाना

4 *एक्स* = 3, 3 *एक्स* – *य* = – 6,

कौन सा, पर सुलझाने इसके साथ ही, देना *एक्स*

#### बीजगणित का जटिल नंबर

3 और *य* = 33 .

4 4

में यह अनुभाग, हम करेगा विकास करना बीजगणित का जटिल नंबर.

* + 1. *जोड़ना का दो जटिल नंबर* होने देना *z* 1 = *ए* + *आईबी* और *z* 2 = *सी* + *पहचान* होना कोई दो जटिल नंबर. तब, जोड़ *z* 1+ \_ *z* 2 है परिभाषित जैसा इस प्रकार है:

*z* 1 + *z* 2 = ( *ए* + *सी* ) + *मैं* ( *बी* + *घ* ), कौन है दोबारा ए जटिल संख्या।

के लिए उदाहरण, (2 + *मैं* 3) + (- 6 + *मैं* 5) = (2 – 6) + *मैं* (3 + 5) = – 4+ *मैं* 8

जोड़ना का जटिल नंबर संतुष्ट अगले गुण:

* + - 1. *बंद कानून*  जोड़ का दो जटिल नंबर है ए जटिल संख्या, अर्थात, *z* 1 + *z* 2 है ए जटिल संख्या के लिए सभी जटिल नंबर *z* 1 और *जेड* 2 .
      2. *विनिमेय कानून* के लिए कोई दो जटिल नंबर *z* 1 और *जेड* 2 ,

*z* 1 + *z* 2 = *z* 2 + *z* 1

* + - 1. *सहयोगी कानून* के लिए कोई तीन सम्मिश्र संख्याएँ *z* 1 , *जेड* 2 , *जेड* 3 , ( *z* 1 + *जेड* 2 ) + *z* 3 = *z* 1 + ( *z* 2 + *जेड* 3 ).
      2. *अस्तित्व का additive पहचान* वहाँ मौजूद जटिल संख्या

0 + *i* 0 (0 के रूप में दर्शाया गया), जिसे *योगात्मक पहचान* या *शून्य सम्मिश्र कहा जाता है संख्या,* ऐसा वह, के लिए प्रत्येक जटिल संख्या *z* , *जेड* + 0 = *जेड*

* + - 1. *का अस्तित्व योगात्मक व्युत्क्रम* प्रति प्रत्येक सम्मिश्र संख्या *z* = *a* + *ib* , हमारे पास सम्मिश्र संख्या है - *a* + *i* (- *b* ) (- के रूप में दर्शाया गया है) *जेड* ), z का *योगात्मक व्युत्क्रम* या *ऋणात्मक* कहा जाता है । हम देखते हैं कि *z* + (- *z* ) = 0 (द additive पहचान)।
    1. *अंतर का दो जटिल नंबर* दिया गया कोई दो जटिल नंबर *z* 1 और

*जेड* 2 , अंतर *z* 1 – *z* 2 है परिभाषित जैसा इस प्रकार है:

*z* 1 – *z* 2 = *z* 1 + (- z 2 ).

के लिए उदाहरण, (6 + 3 *मैं* ) – (2 – *मैं* ) = (6 + 3 *मैं* ) + (- 2 + *मैं* ) = 4 + 4 *मैं*

और (2 - *मैं* ) - (6 + 3i ) *\_* = (2 - *मैं* ) + ( - 6 - 3i ) *\_* = - 4 - 4i *\_*

78 गणित

* + 1. *गुणा का दो जटिल नंबर* होने देना *z* 1 = *ए* + *आईबी* और *z* 2 = *सी* + *पहचान* होना कोई दो जटिल नंबर. तब, उत्पाद *z* 1 *z* 2 है परिभाषित जैसा इस प्रकार है:

*z* 1 *z* 2 = ( *एसी* – *बीडी* ) + *मैं* ( *वि* + *बीसी* )

उदाहरण के लिए, (3 + *आई* 5) (2 + *मैं* 6) = (3 × 2 – 5 × 6) + *i* (3 × 6 + 5 × 2) = – 24 + *मैं* 28

गुणा का जटिल नंबर के पास अगले गुण, कौन हम राज्य बिना सबूत

* + - 1. बंद कानून उत्पाद का दो जटिल नंबर है ए जटिल संख्या, उत्पाद *z* 1 *z* 2 है ए जटिल संख्या के लिए सभी जटिल नंबर *z* 1 और *जेड* 2 .
      2. विनिमेय कानून के लिए कोई दो जटिल नंबर *z* 1 और *जेड* 2 ,

*z* 1 *z* 2 = *z* 2 1

*z*

.

* + - 1. जोड़नेवाला कानून के लिए कोई तीन जटिल नंबर *जेड* 1 , *जेड* 2 , *जेड* 3 ,

( *z* 1 *जेड* 2 ) *जेड* 3 = *z* 1 ( *z* 2 *जेड* 3 ).

* + - 1. गुणात्मक का अस्तित्व पहचान वहाँ सम्मिश्र संख्या मौजूद है

1 + *मैं* 0 (संकेतित जैसा 1), बुलाया *गुणक पहचान* ऐसा वह *जेड* 1 = *z* , प्रत्येक सम्मिश्र संख्या के लिए *z* .

* + - 1. अस्तित्व का गुणक श्लोक में के लिए प्रत्येक शून्येतर जटिल संख्या *जेड* = *ए* + *आईबी* या *ए* + *द्वि* ( *ए* ≠ 0, बी ≠ 0), हम पास होना जटिल संख्या

+ *मैं*  *-बी*

2 + *बी* 2  *ए* 2 + *बी* 2

का *जेड* ऐसा वह

1

(संकेतित द्वारा

या *z* -1 ), बुलाया *गुणक श्लोक में*

*जेड* 11 \_ (द गुणक पहचान)।

* + - 1. विभाजित करनेवाला कानून के लिए कोई तीन जटिल नंबर *जेड* 1 , *जेड* 2 , *जेड* 3 , (ए) *z* 1 ( *z* 2 + *जेड* 3 ) = *z* 1 *z* 2 + *z* 1 *जेड* 3

(बी) ( *z1* \_ + *z2* ) \_ *जेड* 3 = *z* 1 *जेड* 3 + *z* 2 *जेड* 3

* + 1. *विभाजन का दो जटिल नंबर* दिया गया कोई दो जटिल नंबर *z* 1 और *जेड* 2 ,

*z* 1

कहाँ

*z* 2  0 , भागफल

2

*z* 1 = *जेड* 1

है परिभाषित द्वारा

1

*z*

2 2

के लिए उदाहरण, चलो *z* 1 = 6 + 3 *मैं* और *z* 2 = 2 – *मैं*

तब

*z* 1 =  (6 + 3i ) *\_* × 1



*i*





2   2

 = ( 6 + 3i ) *\_*





 2 2

2

+ ( - 1 )

2 + *मैं*

− ( − 1 ) 

2 2 + ( − 1 ) 2 

 



जटिल संख्याएँ और द्विघात समीकरण 79

= ( 6 + 3i *\_*  \_ 2 + *मैं*  = 1  1 2 − 3 + *मैं* ( 6 + 6 )  = 1 ( 9 + 1 2 *आई* )

 5 5 \_   5

* + 1. *शक्ति का मैं* हम जानना वह

*मैं* 3 = *मैं* 2 *मैं* = ( - 1 ) *मैं* = − *मैं* ,

 

*और* 4 = ( *मैं* 2 ) 2 = ( − 1 ) 2 = 1

*मैं* 5  ( *मैं* 2 ) 2 *मैं* = ( − 1 ) 2 *मैं* = *मैं* , *मैं* 6 = ( *मैं* 2 ) 3 = ( − 1 ) 3 = − 1 , वगैरह।

भी, हम पास होना

*मैं* - 1

1 × *मैं* =

*मैं*  *मैं*

*मैं* = − *मैं*  *मैं* − 2 = 1 =

− 1 *मैं* 2

1 = - 1,

− 1

*और* − 3 = 1 = 1 × *मैं* = *और* = *मैं*  *मैं* − 4 = 1 = 1 = 1

*मैं* 3  − *मैं*  *मैं*  1 *मैं* 4  1

में सामान्य, के लिए कोई पूर्णांक *क* , *मैं* 4 *कि* = 1, *मैं* 4 *कि* + 1 = *मैं, मैं* 4 *के* + 2 = -1, *मैं* 4 *कि* + 3 = – *मैं*

* + 1. *वर्ग जड़ों का ए नकारात्मक असली संख्या*

टिप्पणी वह *मैं* 2 = -1 और ( *– मैं* ) 2 = *मैं* 2 = – 1

इसलिए, वर्ग जड़ों का – 1 हैं *मैं* , – *मैं* । तथापि, द्वारा प्रतीक 1 , हम चाहेंगे अर्थ *मैं* केवल।

अब, हम कर सकना देखना वह *मैं* और - *मैं* दोनों हैं समाधान का समीकरण *एक्स* 2 + 1 = 0 या

*एक्स* 2 = -1.

इसी प्रकार (

3 *मैं* ) 2 = (

3 ) 2

*मैं* 2 = 3 (- 1) = – 3

( − 3 *मैं* ) 2

= ( −

3 ) 2

*मैं* 2 = – 3

इसलिए, वर्ग जड़ों का -3 हैं



3

*मैं* और −

3 *मैं* .

दोबारा, प्रतीक



3

है मतलब को प्रतिनिधित्व 3 *मैं* केवल, यानी,

= 3 *मैं* .

आम तौर पर, अगर *ए* है ए सकारात्मक असली संख्या, = =  *मैं* ,



3



*a*



1

हम पहले से जानना वह × =



*b*



*ab*

के लिए सभी सकारात्मक असली संख्या *ए* और *बी* । यह

परिणाम भी रखती है सत्य कब दोनों में से एक *ए* > 0, *बी* < 0 या *ए* < 0, *बी* > 0. क्या अगर *ए* < 0, *बी* < 0? होने देना हम परीक्षण करना।

टिप्पणी वह

80 गणित

*मैं* 2  =



−1



−1

(−1) (−1)

(द्वारा मान लिया जाये  × =

के लिए सभी असली संख्याएँ)

== \_ 1, कौन है ए विरोधाभास को तथ्य वह *मैं* 2  − 1 .



*b*



*ab*



1



*b*



*ab*

इसलिए,



*b*



*ab*

 × ≠ यदि दोनों *ए* और *बी* हैं नकारात्मक असली नंबर.

आगे, अगर कोई का *ए* और *बी* है शून्य, तब, स्पष्ट रूप से,

* + 1. *पहचान* हम सिद्ध करना अगले पहचान

 × = = 0.

( + *जेड*

) 2 = *z* 2 + *z* 2 + 2 *ज़ेड* *जेड*

, के लिए सभी जटिल नंबर *जेड*

और *जेड* .

1 2 1 2 1 2 1 2

सबूत हम है, ( *z* + *जेड* ) 2 = ( *z* + *जेड* ) ( *z* + *जेड* ),

1 2 1 2 1 2

= ( *z* 1+ \_ *जेड* 2 ) *z* 1+ \_ ( *z* 1+ \_ *जेड* 2 ) *z* 2 (वितरणात्मक कानून)

= 2 + *जेड जेड* + *जेड जेड* + *z* 2

(वितरणात्मक कानून)

1 2 11 \_ 2 2

= 2  *z जेड* + *जेड जेड* + *z* 2

(गुणन का क्रमविनिमेय नियम)

11 \_ 2 1 2 2

= 2 + 2 *ज़ेड जेड* + *z* 2

11 \_ 2 2

इसी प्रकार, हम कर सकना सिद्ध करना अगले पहचान:

* + - 1. (

*का* ) 2 = 2 *से* − 2 *का* *का* + 2 *से*

1 2 1 1 2 2

### (

+ *जेड* ) 3 = *जेड* 3 + 3 *z* 2 *z* + 3z *\_* *z* 2 + *जेड* 3

1 2 1 1 2 1 2 2

### (

*जेड* ) 3 = *जेड* 3 − 3z *2z* \_ *\_* + 3z *\_* *z* 2 − *जेड* 3

1 2 1 1 2 1 2 2

(iv) 2 *– z* 2 = ( *जेड* + *जेड* ) ( *जेड – जेड* )

1 2 1 2 1 2

में तथ्य, अनेक अन्य पहचान कौन हैं सत्य के लिए सभी असली संख्याएँ, कर सकना होना साबित को होना सत्य के लिए सभी जटिल नंबर.

उदाहरण 2 अभिव्यक्त करना अगले में रूप का *ए* + *द्वि* :

 1 

 1 3 \_

(मैं ) ( -5 मैं *)*  *मैं* 

8

 

समाधान (i) ( − 5 *i* )  1 *मैं*  =

5 *मैं* 2 =

1. ( - *मैं* ) ( 2 *मैं* )

5 ( 1 ) = 5 = 5 + *और* 0

 − *और* 

 

8

 8  8 8 8 8

 

(ii) ( − *i* ) ( 2 *और* )  −





1 3 \_

*और* 

8 

= 2 × 1 × *और* 5

8 × 8 × 8

= 1 *मैं* 2 2

256

( )

*मैं* = 1 *मैं* .

256

जटिल संख्याएँ और द्विघात समीकरण 81

उदाहरण 3 अभिव्यक्त करना (5 – 3 *मैं* ) 3 में रूप *ए* + *आईबी* .

समाधान हम पास होना, (5 - 3i ) 3 *\_* = 5 3 - 3 × 5 2 × (3 *मैं* ) + 3 × 5 ( *3आई* ) 2 - ( *3i* ) 3

= 125 – 225 *मैं* – 135+ 27 *मैं* = – 10 – 198 *आई.*



3

उदाहरण 4 अभिव्यक्त करना (



3



3

+ − 2 ) ( 2

– *मैं* ) में रूप का *ए* + *मैं बी*

समाधान हम पास होना, (



3

+ − 2 ) ( 2

– *मैं* ) = (

+ 2 *मैं* ) ( 2

– *मैं* )

= − 6 +



3



3

3 *मैं* + 2 6 *मैं* −

2 *मैं* 2 = ( − 6 +

2 ) +

3 ( 1 + 2 2 ) *मैं*

#### मापांक और संयुग्म का ए जटिल संख्या

होने देना *जेड* = *ए* + *आईबी* होना ए जटिल संख्या। तब, मापांक का *z* , लक्षित द्वारा | *जेड* |, है परिभाषित

2 *b*2

2 + *b*2

को होना गैर नकारात्मक असली संख्या

, अर्थात, | *जेड* | =

और संयुग्म

का *z* , लक्षित जैसा , है जटिल संख्या *ए* – *आईबी* , यानी, = *ए* – *आईबी* .

32 + 12

के लिए उदाहरण,

3 + *मैं* =

= 10 ,

2 − 5 *मैं* = = ,

22 + ( − 5)2



29



और 3 *मैं* = 3 − *मैं* , 2 − 5 *मैं* = 2 + 5 *मैं* , 3 *मैं* − 5 = 3i *\_* - 5

निरीक्षण वह गुणक श्लोक में का शून्येतर जटिल संख्या *जेड* है दिया गया द्वारा

*z* -1 =

1

+ *आईबी*

= + *मैं*  *बी*

2 + *बी* 2  *ए* 2 + *बी* 2

*आईबी*

= *a2* \_ + *बी* 2 = 2

या *z*

= *जेड* 2

आगे, अगले परिणाम कर सकना आसानी से होना व्युत्पन्न।

के लिए कोई दो कॉम्पेक्स नंबर *z* 1 और *z* 2 , हम पास होना

(मैं)

1 *z* 2

= *z* 1 *z* 2

(ii)

*z* 1 = 1

2 *z* 2

प्रदान किया

*z* 2 ≠ 0

 1  = *z* 1

1. 1 2 *से* = 1 *से* 2 *से*

2

1. 1 ± 2 *से* = 1 *से* ± 2 *से* (में)   प्रदान *से* *का* ≠ 0.

 2 2 \_

82 गणित

उदाहरण 5 खोजें गुणात्मक प्रतिलोम 2 का – 3 *मैं* .

समाधान चलो *जेड* = 2 – 3 *मैं*

फिर = 2+ 3 *मैं* और

*जेड* 2  2 2 + ( − 3) 2 = 13

इसलिए, गुणक श्लोक में का 2 3 *मैं* है दिया गया द्वारा

*z*  2 + 3 *मैं*  2 3

*z* -1 =

*जेड*

= = + *मैं*

13 13

2 13

ऊपर कार्यरत कर सकना होना reproduced में अगले ढंग भी,

1 2 + 3i *\_*

*जेड* -1 =

2 − 3i *\_*

= (2 − 3i *)* (2 + 3i ) *\_*

= 2 + 3i *\_* = 2 + 3i *\_* = 2 + 3 *मैं*

2 2 − (3 *आई* ) 2  13 13 13

उदाहरण 6 अभिव्यक्त करना अगले में रूप *ए* + *आईबी*

1. (ii) *मैं* -35



5 + 2*i*

1− 2*i*

समाधान (मैं) हम पास होना,

= 5 + 2i *\_* × 1 + 2i *\_*

= 5 5 2i *\_* + 2i − *\_* 2

1 − 2i *\_*



5 + 2*i*

1 − 2*i*



1 + 2i *\_*

1 − ( 2i *\_* ) 2

= 3 + 6 2i *\_* = 3( 1+ 2 2i ) *\_* 1 + 2 3

*i*

= 1 + 2 2 *मैं* .

1. *से* − 35

1

*से* 35

= 1

( *से* 2 ) 1 7 *मैं*

= 1 एक्स *मैं*

- *मैं को*

= − *मैं* 2 = *मैं*

अभिव्यक्त करना प्रत्येक का जटिल संख्या दिया गया में अभ्यास 1 को 10 में रूप *ए* + *आईबी.*

EXERCISE 4.1

1 . ( 5 *i* )  − 3 *मैं* 

2. 9 19

3. 39



 5 

*मैं* + *मैं मैं*

जटिल संख्याएँ और द्विघात समीकरण 83

4. 3(7+ *और* 7) + *और* (7+ *और* 7) 5. (1 – *मैं* ) – ( -1 + *और* 6)

6.  1 + *मैं* 2  −  4 + *मैं* 5 

  1

7.

*मैं* 7  +  4 + *मैं* 1   −  − 4 + *मैं* 

5 5  2 \_    3 3   3    3 \_

          

 1  3   1 3 \_

8. (1 – *मैं* ) 4 9.





 3 + 3 *मैं* 

10.

 − 2 − 3 *मैं* 

खोजो गुणक श्लोक में का प्रत्येक का जटिल नंबर दिया गया में अभ्यास 11 से 13.



5

11। 4 – 3 *मैं*  12.

+ 3 *मैं*

1. – *मैं*
2. अभिव्यक्त करना अगले अभिव्यक्ति में रूप का *ए* + *आईबी* :

( 3 + *मैं* 5 ) ( 3 − *मैं* 5 )

( + 2 *मैं* ) − ( − *मैं* 2 )



3



3

#### अरगंड विमान और ध्रुवीय प्रतिनिधित्व

हम पहले से ही इसके अनुरूप जानते हैं प्रत्येक आदेश दिया जोड़ा का असली नंबर ( *x* , *y* ), हमें XY में एक अद्वितीय बिंदु मिलता है- विमान और विपरीतता से साथ संदर्भ को ए तय करना का परस्पर सीधा पंक्तियां ज्ञात जैसा *एक्स* -अक्ष और *y* -अक्ष. जटिल संख्या *x* + *iy* जो से मेल खाती है क्रमित युग्म ( *x* , *y* ) का प्रतिनिधित्व किया जा सकता है ज्यामितीय जैसा अद्वितीय बिंदु पी( *एक्स* , *य* ) में XY विमान और विपरीतता से।



कुछ जटिल नंबर ऐसा जैसा 2 + 4 *मैं* , – 2 + 3 *मैं* , 0 + 1 *मैं* , 2 + 0 *मैं* , – 5 -2 *मैं* और

1 – 2 *मैं* कौन अनुरूप को आदेश दिया







अंजीर 4.1

क्रमशः जोड़े (2, 4), (- 2, 3), (0, 1), (2, 0), (-5, -2), और (1, - 2) हैं का प्रतिनिधित्व किया ज्यामितीय द्वारा अंक ए, बी, सी, डी, इ, और एफ, क्रमश: में अंजीर 4.1.

विमान होना ए जटिल संख्या सौंपा गया को प्रत्येक का इसका बिंदु है बुलाया

*जटिल विमान* या *अरगंड विमान* ।

84 गणित

ज़ाहिर तौर से, में अरगंड विमान, मापांक का जटिल संख्या

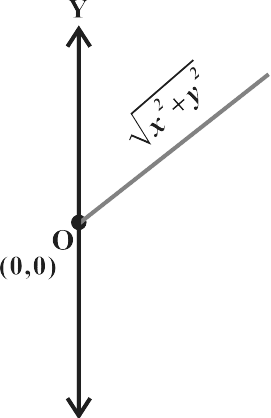
*एक्स* + *iy* = है दूरी बीच में बिंदु पी( *एक्स* , *य* ) और मूल हे (0, 0)

2 + *y*2

(अंजीर 4.2). अंक पर *एक्स* -अक्ष मेल खाती है को जटिल नंबर का रूप

*ए* + *मैं* 0 और अंक पर *y* -अक्ष मेल खाती है को जटिल नंबर का रूप

अंजीर 4.2



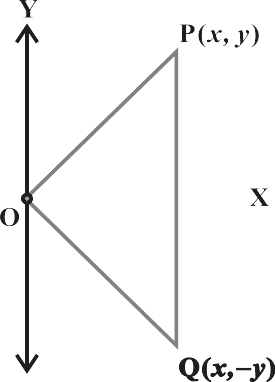
0 + *मैं बी* । *एक्स* -अक्ष और *y* -अक्ष में अरगंड विमान हैं बुलाया, क्रमश, *असली एक्सिस*

और *काल्पनिक एक्सिस* ।

प्रतिनिधित्व का ए जटिल संख्या *जेड* = *एक्स* + *iy* और इसका संयुग्म

*जेड* = *एक्स* – *iy* में अरगंड विमान हैं, क्रमश, अंक पी ( *एक्स, य* ) और क्यू ( *एक्स, – य* ).

ज्यामितीय रूप से, बिंदु ( *एक्स* , *– य* ) है आईना छवि का बिंदु ( *एक्स* , *य* ) पर असली एक्सिस (अंजीर 4.3).



अंजीर 4.3

जटिल संख्याएँ और द्विघात समीकरण 85

##### मिश्रित उदाहरण

(3 2 *मैं* )(2 + 3 *मैं* )

उदाहरण 7 खोजो संयुग्म का

(1 + 2 *मैं* )(2 − *मैं* ) .

समाधान हम पास होना ,

(3 − 2 *मैं* )(2 + 3 *मैं* )

(1 2 *मैं* )(2 − *मैं* )

6 + 9 *मैं* − 4i *\_* + 6

=

= 12 5i *\_* × 4 − 3i *\_*

2 − *मैं* + 4i *\_* + 2

4 + 3 *मैं*  4 − 3i *\_*

= 48 − 36 *मैं* + 20 *मैं* +15 \_ = 63 − 16 *आई*

16 + 9 25

= 63 − 16 *मैं*

25 25

इसलिए, संयुग्म का (3 2 *मैं* )(2 + 3 *मैं* ) है 63 + 16 *मैं* .

(1 + 2*i*)(2 − *i*) 25 25

+ *आईबी*

उदाहरण 8 अगर *एक्स* + *iy* = *ए* − *आईबी* , सिद्ध करना वह *एक्स* 2 + *य* 2 = 1.

समाधान हम पास होना,

*एक्स* + *iy* =

( *आईबी* )( *ए* + *आईबी* )

( *ए* − *आईबी* )( *ए* + *आईबी* ) =

2 − *बी* 2 + 2 *अबी*

*एक* 2 + *बी* 2

*एक* 2 − *बी* 2

*=*  2 + *बी* 2

+

2 *अब मैं एक* 2 + *बी* 2

इसलिए वह, *एक्स* – *iy =*

इसलिए,

*a2* \_ − *बी* 2 −

2 + *बी* 2

2 *अब मैं a2* \_ + *बी* 2

( *a2* \_ − *बी* 2 ) 2

4 *ए* 2 *बी* 2

( *ए* 2 + *बी* 2 ) 2

*एक्स* 2 + *य* 2 = ( *एक्स* + *iy* ) ( *एक्स* – *iy* ) =

+

( *a2* \_ + *बी* 2 ( 2  ) *ए2* \_ + *बी* 2 ) 2

*=* ( *a2* \_ + *बी* 2 ) 2 *=* 1

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 4

  1 25 \_ 3 \_

1. मूल्यांकन करना:

*मैं* 18 +    .

  *मैं*   

1. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं *z* 1 और *z* 2 के लिए , इसे सिद्ध करें दोबारा ( *z* 1 *जेड* 2 ) = दोबारा *z* 1 दोबारा *z* 2 – मैं *z* 1 मैं *z* 2 .

86 गणित

1 \_

1. कम करना

– 2   3 − 4 *मैं* 

को मानक रूप .

 1 - 4 *मैं*  1+ \_ *मैं*   5 + *मैं* 

   

2 2 2

*a* − *ib*

*c* − *id*

*एक* 2 + *बी* 2

1. अगर

*एक्स* − *iy* =

सिद्ध करना वह ( *एक्स*

+ *य* ) =

2 + *डी* 2 .

5. अगर *z* 1 = 2 – *मैं* , *z* 2 = 1 + *मैं* , खोजो ।

*z*1 + *z*2 +1

*z*1 *z*2 +1

(

1. अगर *ए* + *आईबी* =

2*x*

+ *मैं* ) 2

2

+1

( *एक्स* 2 +1 ) 2

, सिद्ध करना वह *एक* 2 + *बी* 2 = ( 2 *x* 2 + 1 ) 2 .

1. होने देना *z* 1 = 2 – *मैं* , *z* 2 = -2 + *मैं।* खोजो

(मैं)

आर ई 



1 *ज़ेड* 2 

 , (ii)

मैं  \_

1 

*साथ*  .

1   1 1 

1. खोजो असली नंबर *एक्स* और *य* यदि ( *एक्स* – *iy* ) (3 + 5 *मैं* ) है संयुग्म का -6 – 24 *मैं* .
2. खोजो मापांक का 1+ \_ *मैं* − 1 - *मैं* .

1 *मैं* 1+ \_ *मैं*

1. अगर ( *एक्स* + *iy* ) 3 = *यू* + *चतुर्थ* , तब दिखाओ वह

*यू* + *वी* = 4( *x* 2 – *य* 2 ) .

*x*  *y*

*β α*

1 *– αβ*

1. अगर α और β हैं अलग जटिल नंबर साथ *β*

1 , तब खोजो ।

1. खोजो संख्या का शून्येतर अभिन्न समाधान का समीकरण
2. अगर ( *ए* + *आईबी* ) ( *सी* + *पहचान* ) ( *इ* + *अगर* ) ( *जी* + *इह* ) = ए + *मैं* बी, तब दिखाओ वह ( *ए* 2 + *बी* 2 ) ( *सी* 2 + *घ* 2 ) ( *ई* 2 + *एफ* 2 ) ( *जी* 2 + *ज* 2 ) = ए 2 + बी 2

 1 + *मैं*  *एम*

1 *– मैं एक्स* = 2x *\_* .

1. अगर  1 *– मैं*  1 , तब खोजो कम से कम सकारात्मक अभिन्न कीमत का *एम* ।

 

जटिल संख्याएँ और द्विघात समीकरण 87

*Summary*

�A number of the form *a* + *ib*, where *a* and *b* are real numbers, is called a

*complex number*, *a* is called the *real part* and *b* is called the *imaginary* part

of the complex number.

�Let *z*1 = *a* + *ib* and *z*2 = *c* + *id*. Then (i) *z*1 + *z*2 = (*a* + *c*) + *i* (*b* + *d*)

(ii) *z*1 *z*2 = (*ac* – *bd*) + *i* (*ad* + *bc*)

�For any non-zero complex number *z* = *a* + *ib* (*a* ≠ 0, *b* ≠ 0), there exists the

*a* *b*

complex number

+ *i* , denoted by

2 + *b*2 *a*2 + *b*2

1

or *z*–1, called the

*multiplicative inverse* of *z* such that (*a* + *ib*)

=1

*a*2 + *b*2 + *i a*2 + *b*2

*a*

−*b*

= 1 + *i*0

�For any integer *k*, *i*4*k* = 1, *i*4*k* + 1 = *i*, *i*4*k* + 2 = – 1, *i*4*k* + 3 = – *i*

�The conjugate of the complex number *z* = *a* + *ib*, denoted by , is given by

= *a* – *ib.*

*Historical Note*

The fact that square root of a negative number does not exist in the real number system was recognised by the Greeks. But the credit goes to the Indian mathematician *Mahavira* (850) who first stated this difficulty clearly. “He mentions in his work ‘*Ganitasara Sangraha*’ as in the nature of things a negative (quantity) is not a square (quantity)’, it has, therefore, no square root”. *Bhaskara*, another Indian mathematician, also writes in his work *Bijaganita*, written in 1150. “There is no square root of a negative quantity, for it is not a square.” *Cardan* (1545) considered the problem of solving

*x* + *y* = 10, *xy* = 40.

88 गणित



He obtained *x* = 5 + −15 and *y = 5 –* 15 as the solution of it, which was discarded by him by saying that these numbers are ‘useless’. *Albert Girard* (about 1625) accepted square root of negative numbers and said that this will enable us to get as many roots as the degree of the polynomial equation.

*Euler* was the first to introduce the symbol *i* for 1 and *W.R. Hamilton* (about 1830) regarded the complex number *a* + *ib* as an ordered pair of real numbers (*a*, *b*) thus giving it a purely mathematical definition and avoiding use of the so called ‘*imaginary numbers*’.

— **�** —

अध्याय 5

LINEAR INEQUALITIES

गणित *है कला का कह रहा अनेक चीज़ें में अनेक अलग तौर तरीकों।* – *मैक्सवेल*

#### परिचय

में पहले कक्षाएं, हम पास होना अध्ययन समीकरण में एक चर और दो चर और भी हल किया कुछ कथन समस्या द्वारा अनुवाद करना उन्हें में रूप का समीकरण. अब ए स्वाभाविक प्रश्न उठता है: 'क्या किसी कथन समस्या का अनुवाद करना हमेशा संभव है रूप का एक समीकरण? के लिए उदाहरण, ऊंचाई का सभी छात्र में आपका कक्षा है कम

बजाय 160 सेमी। आपका कक्षा कर सकना पर कब्जा अधिक से अधिक 60 टेबल या कुर्सियां या दोनों। यहाँ हम पाना निश्चित कथन को शामिल ए संकेत '<' (कम बजाय), '>' (अधिक बजाय), ' ≤ ' (कम बजाय या बराबर) और ≥ (अधिक बजाय या बराबर) कौन हैं ज्ञात जैसा *असमानताएँ* ।

में यह अध्याय, हम इच्छा अध्ययन रेखीय असमानता में एक और दो चर।

अध्ययन का असमानता है बहुत उपयोगी में सुलझाने समस्या में मैदान का विज्ञान, अंक शास्त्र, सांख्यिकी, अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान, वगैरह।

#### असमानता

होने देना हम विचार करना अगले स्थितियाँ:

1. रवि जाता है को बाज़ार साथ ` 200 को खरीदना चावल, कौन है उपलब्ध में पैकेट का 1 किलोग्राम। कीमत का एक पैकेट का चावल है ` 30. अगर *एक्स* अर्थ है संख्या का पैकेट का चावल, कौन वह खरीदता है, तब कुल मात्रा खर्च किया द्वारा उसे है ` 30 *एक्स* . तब से, वह है को खरीदना चावल में पैकेट केवल, वह शायद कर सकता है नहीं होना योग्य की पूरी राशि खर्च करने के लिए ` 200. (क्यों?) इस तरह

30 *एक्स* < 200 ... (1)

स्पष्ट रूप से कथन (मैं) है नहीं एक समीकरण जैसा यह करता है नहीं शामिल होना संकेत का समानता.

1. रेशमा के पास ₹ 120 हैं और वह कुछ रजिस्टर और पेन खरीदना चाहती है। एक की कीमत रजिस्टर है ₹ 40 और एक पेन का मूल्य ₹ 20 है। इस मामले में, यदि *x* की संख्या दर्शाता है रजिस्टर और *हाँ* , संख्या का कलम कौन रेशमा खरीदता है, तब कुल मात्रा खर्च किया द्वारा उसकी है ` (40 *एक्स +* 20 *वर्ष* ) और हम पास होना

40 *एक्स +* 20 *साल* ≤ 120 ... (2)

90 गणित

तब से में यह मामला कुल मात्रा खर्च किया मई होना तक ` 120. टिप्पणी वह कथन (2) बना होना का दो कथन

40 *एक्स +* 20 *साल <* 120 ... (3)

और 40 *एक्स +* 20 *साल =* 120 ... (4)

कथन (3) है नहीं एक समीकरण, अर्थात, यह है एक असमानता जबकि कथन (4) है एक समीकरण.

परिभाषा 1 दो असली नंबर या दो बीजगणितीय अभिव्यक्ति संबंधित द्वारा प्रतीक '<', '>', ' ≤ ' या ' ≥ ' रूप एक *असमानता* .

बयान जैसे (1), (2) और (3) ऊपर हैं असमानताएँ

3 < 5; 7 > 5 हैं उदाहरण का *न्यूमेरिकल असमानता* जबकि

*एक्स* < 5; *य* > 2; *एक्स* ≥ 3, *य* ≤ 4 हैं कुछ उदाहरण का *शाब्दिक असमानताएँ* ।

3 < 5 < 7 (पढ़ना जैसा 5 है ग्रेटर बजाय 3 और कम बजाय 7), 3 < *एक्स* < 5 (पढ़ना जैसा *एक्स* है ग्रेटर बजाय या बराबर को 3 और कम बजाय 5) और 2 < *य* < 4 हैं उदाहरण का *दोहरा असमानताएँ* ।

कुछ अधिक उदाहरण का असमानता हैं:

|  |  |
| --- | --- |
| *कुल्हाड़ी + बी* < 0 | ... (5) |
| *कुल्हाड़ी + बी* > 0 | ... (6) |
| *कुल्हाड़ी + बी* ≤ 0 | ... (7) |
| *कुल्हाड़ी + बी* ≥ 0 | ... (8) |
| *कुल्हाड़ी + द्वारा* < *सी* | ... (9) |
| *कुल्हाड़ी + द्वारा* > *सी* | ... (10) |
| *कुल्हाड़ी + द्वारा* ≤ *सी* | ... (11) |
| *कुल्हाड़ी + द्वारा* ≥ *सी* | ... (12) |
| *कुल्हाड़ी* 2 *+ बीएक्स + सी* ≤ 0 | ... (13) |
| *कुल्हाड़ी* 2 *+ बीएक्स + सी* > 0 | ... (14) |

असमानता (5), (6), (9), (10) और (14) हैं *कठोर असमानता* जबकि असमानता (7), (8),

(11), (12), और (13) *सुस्त असमानताएँ हैं* । (5) से (8) तक असमानताएँ *रैखिक हैं* एक चर *x में असमानताएँ* जब *a* ≠ 0, जबकि (9) से (12) तक की असमानताएँ *रैखिक होती हैं असमानता में दो चर एक्स और य* कब *ए* ≠ 0, *बी* ≠ 0.

असमानता (13) और (14) हैं नहीं रेखीय *(में तथ्य, इन हैं द्विघात असमानता में एक चर एक्स कब ए* ≠ 0) *.*

में यह अध्याय, हम करेगा सीमित हम स्वयं को अध्ययन का रेखीय असमानता में एक और दो चर केवल।

रेखीय असमानताएँ 91

#### बीजगणितीय समाधान का रेखीय असमानता में एक चर और उनका चित्रात्मक प्रतिनिधित्व

होने देना हम विचार करना असमानता (1) का अनुभाग 6.2, अर्थात, 30 *एक्स <* 200 टिप्पणी वह यहाँ *एक्स* अर्थ है संख्या का पैकेट का चावल।

ज़ाहिर तौर से, *एक्स* नही सकता होना ए नकारात्मक पूर्णांक या ए अंश। बाएं हाथ ओर (एलएचएस) का यह असमानता है 30 *एक्स* और सही हाथ ओर (आरएचएस) है 200. इसलिए, हम पास होना

*एक्स* के लिए= 0, एलएचएस = 30 (0) = 0 < 200 (आरएचएस), जो है सत्य।

के लिए *एक्स* = 1, एलएचएस = 30(1) = 30 < 200 (आरएचएस), जो है सत्य।

के लिए *एक्स* = 2, एलएचएस = 30(2) = 60 <200, कौन क्या सच है।

के लिए *एक्स* = 3, एलएचएस = 30(3) = 90 <200, कौन क्या सच है।

के लिए *एक्स* = 4, एलएचएस = 30(4) = 120 <200, कौन है सत्य।

के लिए *एक्स* = 5, एलएचएस = 30(5) = 150 <200, कौन है सत्य।

के लिए *एक्स* = 6, एलएचएस = 30(6) = 180 <200, कौन है सत्य।

के लिए *एक्स* = 7, एलएचएस = 30 (7) = 210 < 200, कौन है असत्य।

*x* का मान , जो उपरोक्त बनाता है असमानता एक सत्य कथन है, 0,1,2,3,4,5,6 हैं। *x* के ये मान , जो ऊपर बनाते हैं असमानता ए सत्य कथन, हैं बुलाया *समाधान* का असमानता और तय करना {0,1,2,3,4,5,6} है बुलाया इसका *समाधान तय करना* ।

*इस प्रकार, कोई समाधान का एक असमानता में एक परिवर्तनशील है ए कीमत का चर कौन बनाता है यह ए सत्य कथन।*

हमने उपरोक्त असमानता का समाधान *परीक्षण और त्रुटि* विधि से पाया है कौन है नहीं बहुत कुशल। ज़ाहिर तौर से, यह तरीका है समय उपभोक्ता और कभी-कभी नहीं संभव। हम अवश्य पास होना कुछ बेहतर या व्यवस्थित TECHNIQUES के लिए सुलझाने असमानताएँ पहले वह हम चाहिए जाना के माध्यम से कुछ अधिक गुण का न्यूमेरिकल असमानता और अनुसरण करना उन्हें जैसा नियम जबकि सुलझाने असमानताएँ

आप इच्छा याद करना वह जबकि सुलझाने रेखीय समीकरण, हम पालन किया अगले नियम:

नियम 1 बराबर नंबर मई होना जोड़ा को (या घटाया से) दोनों दोनों पक्ष का एक समीकरण.

नियम 2 दोनों दोनों पक्ष का एक समीकरण मई होना गुणा किया हुआ (या अलग करना) द्वारा वही शून्येतर संख्या।

में मामला का सुलझाने असमानताएं, हम दोबारा अनुसरण करना वही नियम के अलावा साथ ए अंतर यह है कि नियम 2 में, असमानता का चिह्न उलट दिया गया है (अर्थात, '<' '>' बन जाता है, ≤ ' जब भी हम किसी असमानता के दोनों पक्षों को गुणा (या विभाजित) करते हैं तो ' ≥ ' बन जाता है और इसी तरह) एक नकारात्मक संख्या। यह है प्रत्यक्ष से तथ्य वह

3 > 2 जबकि – 3 <- 2,

– 8 < – 7 जबकि (- 8) (- 2) > (- 7) (- 2) , अर्थात, 16 > 14.

92 गणित

इस प्रकार, हम राज्य अगले नियम के लिए सुलझाने एक असमानता:

नियम 1 बराबर नंबर मई होना जोड़ा को (या घटाया से) दोनों दोनों पक्ष का एक असमानता बिना प्रभावित संकेत का असमानता.

नियम 2 दोनों दोनों पक्ष का एक असमानता कर सकना होना गुणा किया हुआ (या अलग करना) द्वारा वही सकारात्मक संख्या। लेकिन कब दोनों दोनों पक्ष हैं गुणा किया हुआ या अलग करना द्वारा ए नकारात्मक संख्या, तब संकेत का असमानता है *उलटा।*

अब, होने देना हम विचार करना कुछ उदाहरण।

उदाहरण 1 हल करना 30 *एक्स* < 200 कब

1. *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या, (ii) *एक्स* है एक पूर्णांक.

समाधान हम हैं दिया गया 30 *एक्स* < 200

या 30x *\_* < 200

30 30

(नियम 2), अर्थात, *एक्स* <20/ 3.

1. कब *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या, में यह मामला अगले मान का *एक्स* बनाना कथन सत्य।

1, 2, 3, 4, 5, 6.

समाधान तय करना का असमानता है {1,2,3,4,5,6}।

1. कब *एक्स* है एक पूर्णांक, समाधान का दिया गया असमानता हैं

..., – 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

समाधान तय करना का असमानता है {...,–3, –2,–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

उदाहरण 2 हल करना 5 *एक्स* – 3 < 3 *एक्स* +1 कब

(मैं) *एक्स* है एक पूर्णांक, (ii) *एक्स* है ए असली संख्या।

समाधान हम पास होना, 5 *एक्स* -3 < 3 *एक्स* + 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| या | 5 *x* -3 + 3 < 3 *एक्स* +1 +3 | (नियम 1) |
| या | 5 *एक्स* < 3 *एक्स* +4 |  |
| या | 5 *एक्स* – 3 *एक्स* < 3 *एक्स* + 4 – 3 *एक्स* | (नियम 1) |
| या | 2 *एक्स* <4 |  |
| या | *एक्स* < 2 | (नियम 2) |

1. कब *एक्स* है एक पूर्णांक, समाधान का दिया गया असमानता हैं

..., – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1

1. कब *एक्स* है ए असली संख्या, समाधान का असमानता हैं दिया गया द्वारा *एक्स* < 2, अर्थात, सभी असली नंबर *एक्स* कौन हैं कम बजाय 2. इसलिए, समाधान तय करना का असमानता है *एक्स* ∈ (- ∞ , 2).

हम पास होना माना समाधान का असमानता में तय करना का प्राकृतिक संख्याएँ, तय करना का

पूर्णांक और वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में। अब से, जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम ऐसा करेंगे हल करना असमानता में यह अध्याय में तय करना का असली नंबर.

रेखीय असमानताएँ 93

उदाहरण 3 हल करना 4 *एक्स* + 3 < 6 *एक्स* +7.

समाधान हम है, 4 *x* + 3 < 6 *x* + 7 या 4 *एक्स* – 6 *एक्स* < 6 *एक्स* + 4 – 6 *एक्स*

या - 2 *एक्स* < 4 या *एक्स* > – 2

अर्थात, सभी असली नंबर कौन हैं ग्रेटर बजाय -2, हैं समाधान का दिया गया असमानता. इस तरह, समाधान तय करना है (-2, ∞ ).

उदाहरण 4 हल करना 5 *–* 2 *एक्स* ≤ *एक्स*  5 .

3 6

समाधान हम पास होना

5 *–* 2 *एक्स* ≤ *एक्स*  5

3 6

या 2 (5 - 2 *एक्स* ) ≤ *एक्स* - 30.

या 10 – 4 *एक्स* ≤ *एक्स* – 30

या - 5 *एक्स* ≤ – 40, अर्थात, *एक्स* ≥ 8

इस प्रकार, सभी असली नंबर *एक्स* कौन हैं ग्रेटर बजाय या बराबर को 8 हैं समाधान का दिया गया असमानता, अर्थात, *एक्स* ∈ [8, ∞ ).

उदाहरण 5 हल करना 7 *एक्स* + 3 <5 *एक्स* +9. ग्राफ़ दिखाएँ की समाधान चालू संख्या रेखा।

समाधान हम पास होना 7 *एक्स* + 3 < 5 *एक्स* + 9 या

2 *एक्स* < 6 या *एक्स* < 3

चित्रमय प्रतिनिधित्व का समाधान हैं दिया गया में अंजीर 5.1.



अंजीर 5.1

3 *x*  4 *x* + 1

उदाहरण 6 हल करें ≥ − 1 . दिखाओ ग्राफ का समाधान पर संख्या रेखा।

2 4

समाधान हम पास होना

3 *x*  4 ≥ *एक्स* + 1 − 1

2 4

या 3 *x*  4 ≥ *एक्स* − 3

2 4

या 2 (3 *एक्स* – 4) ≥ ( *एक्स* - 3)

94 गणित

या 6 *एक्स* – 8 ≥ *एक्स* – 3

या 5 *एक्स* ≥ 5 या *एक्स* ≥ 1

चित्रमय प्रतिनिधित्व का समाधान है दिया गया में अंजीर 5.2.



अंजीर 5.2

उदाहरण 7 ग्यारहवीं कक्षा के एक छात्र द्वारा पहले और दूसरे टर्मिनल में प्राप्त अंक इंतिहान हैं 62 और 48, क्रमश। खोजो न्यूनतम निशान वह चाहिए पाना में वार्षिक इंतिहान को पास होना एक औसत का पर कम से कम 60 निशान।

समाधान चलो *एक्स* होना निशान प्राप्त किया द्वारा विद्यार्थी में वार्षिक इंतिहान। तब

62+ \_ 48+ \_ *एक्स* ≥ 60

3

या 110 + *एक्स* ≥ 180

या *एक्स* ≥ 70

इस प्रकार, विद्यार्थी अवश्य प्राप्त ए न्यूनतम का 70 निशान को पाना एक औसत का पर कम से कम 60 निशान।

उदाहरण 8 खोजो सभी जोड़े का लगातार विषम प्राकृतिक संख्याएँ, दोनों का कौन हैं बड़ा बजाय 10, ऐसा वह उनका जोड़ है कम बजाय 40.

समाधान होने देना *एक्स* होना छोटे का दो लगातार विषम प्राकृतिक संख्या, इसलिए वह अन्य कोई है *एक्स* +2. फिर, हमारे पास होना चाहिए

*एक्स* > 10 ... (1)

और *एक्स* + ( *एक्स* + 2) < 40 ... (2)

हल (2), हम पाना 2 *एक्स* +2 <40

अर्थात, *एक्स* <19 ... (3)

से (1) और (3), हम पाना

10 < *एक्स* < 19

तब से *एक्स* है एक विषम संख्या, *एक्स* कर सकना लेना मान 11, 13, 15, और 17. इसलिए, आवश्यक संभव जोड़े इच्छा होना

(11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19)

रेखीय असमानताएँ 95

EXERCISE 5.1

1. हल करना 24 *एक्स* < 100, कब
   1. *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या। (ii) *एक्स* है एक पूर्णांक.
2. हल करना – 12 *एक्स* > 30, कब
   1. *एक्स* है ए प्राकृतिक संख्या। (ii) *एक्स* है एक पूर्णांक.
3. हल करना 5 *एक्स* – 3 <7, कब
   1. *एक्स* है एक पूर्णांक. (ii) *एक्स* है ए असली संख्या।
4. हल करना 3 *एक्स* + 8 >2, कब
   1. *एक्स* है एक पूर्णांक. (ii) *एक्स* है ए असली संख्या। हल करना असमानता में अभ्यास 5 को 16 के लिए असली *एक्स* ।

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 5. | 4*x* + 3 < 5*x* + 7 | 6. | 3*x* – 7 > 5*x* – 1 |
| 7. | 3(*x* – 1) ≤ 2 (*x* – 3) | 8. | 3 (2 – *x*) ≥ 2 (1 – *x*) |

9. *एक्स*

*एक्स* + *एक्स* < 11 2 3

10.

*एक्स* +1 \_

3 2

3(

11।

– 2) ≤ 5(2 − *एक्स* )

12 . 1  3 *एक्स* + 4  ≥ 1 ( *एक्स* − 6)

5 3 2  5 \_ 3

 

13. 2 (2 *एक्स* + 3) – 10 < 6 ( *एक्स* – 2) 14. 37 – (3 *एक्स* + 5) > 9 *एक्स* – 8 ( *एक्स* – 3)

15.

*एक्स* < (5 *एक्स*

2) − (7 *एक्स* −3 )

(2

16.

###### - 1) ≥ (3 *एक्स* − 2) − (2 − *एक्स* )

4 3 5 3 4 5

हल करना असमानता में अभ्यास 17 को 20 और दिखाओ ग्राफ का समाधान में प्रत्येक मामला पर संख्या रेखा

17. 3x *\_* - 2 < 2x *\_* + 1 18.5 x *\_* - 3 > 3x *\_* - 5

19. 3 (1 – *एक्स* ) < 2 ( *एक्स* + 4) 20.

*एक्स* ≥ (5 *एक्स* – 2) – (7 *एक्स* – 3) 2 3 5

1. रवि प्राप्त किया 70 और 75 निशान में पहला दो इकाई परीक्षा। खोजो न्यूनतम निशान वह चाहिए पाना में तीसरा परीक्षा को पास होना एक औसत का पर कम से कम 60 अंक.
2. किसी पाठ्यक्रम में ग्रेड 'ए' प्राप्त करने के लिए, व्यक्ति को औसतन 90 अंक प्राप्त करने होंगे पांच परीक्षाओं में अधिक (प्रत्येक 100 अंक)। यदि सुनीता के अंक पहले चार में हैं परीक्षा हैं 87, 92, 94 और 95, खोजो न्यूनतम निशान वह सुनीता अवश्य प्राप्त में पांचवां इंतिहान को पाना श्रेणी 'ए' में अवधि।
3. खोजो सभी जोड़े का लगातार विषम सकारात्मक पूर्णांकों दोनों का कौन हैं छोटे बजाय 10 ऐसा वह उनका जोड़ है अधिक बजाय 11।
4. खोजो सभी जोड़े का लगातार यहां तक की सकारात्मक पूर्णांक, दोनों का कौन हैं बड़ा बजाय 5 ऐसा वह उनका जोड़ है कम बजाय 23.

96 गणित

1. सबसे लंबे समय तक ओर का ए त्रिकोण है 3 टाइम्स कम से कम ओर और तीसरा ओर है 2 सेमी कम बजाय सबसे लंबे समय तक ओर। अगर परिमाप का त्रिकोण है पर कम से कम 61 सेमी, खोजो न्यूनतम लंबाई का कम से कम ओर।
2. एक आदमी 91 सेमी लंबाई वाले बोर्ड के एक टुकड़े से तीन लंबाई काटना चाहता है। दूसरा लंबाई है को होना 3 सेमी अब बजाय कम से कम और तीसरा लंबाई है को सबसे छोटे से दोगुना लंबा हो। सबसे छोटी की संभावित लंबाई क्या है? तख़्ता यदि तीसरा टुकड़ा कम से कम होना है दूसरे से 5 सेमी लंबा?

[ *संकेत :* यदि *x* सबसे छोटे बोर्ड की लंबाई है, तो *x* , ( *x* + 3) और 2 *x* हैं क्रमशः दूसरे और तीसरे टुकड़े की लंबाई। इस प्रकार, *x* + ( *x* + 3) + 2 *x* ≤ 91 और 2 *एक्स* ≥ ( *एक्स* + 3) + 5].

*मिश्रित उदाहरण*

उदाहरण 9 हल करना – 8 ≤ 5 *एक्स* – 3 < 7.

समाधान में यह मामला, हम पास होना दो असमानताएं, – 8 ≤ 5 *एक्स* – 3 और 5 *एक्स* – 3 < 7, कौन हम इच्छा हल करना इसके साथ ही। हम पास होना – 8 ≤ 5 *x* -3 < 7

या -5 ≤ 5 *एक्स* < 10 या -1 ≤ *एक्स* < 2

5 3 *एक्स*

उदाहरण 10 हल करना – 5 ≤ 2 ≤ 8.

5 3 *एक्स*

समाधान हम पास होना - 5 ≤ 2 ≤ 8

या -10 ≤ 5 – 3 *एक्स* ≤ 16 या - 15 ≤- \_ 3 *एक्स* ≤ 11

11

या 5 ≥ *एक्स* ≥ – 3

11

कौन कर सकना होना लिखा हुआ 3 ≤ के रूप में *एक्स* ≤ 5

उदाहरण 11 सिस्टम को हल करें का असमानताएँ:

3 *एक्स* – 7 < 5 + *एक्स*  ... (1)

11 – 5 *एक्स* ≤ 1 ... (2)

और प्रतिनिधित्व करना समाधान पर संख्या रेखा।

समाधान असमानता (1) से, हमारे पास है 3 *एक्स* – 7 < 5 + *एक्स*

या *एक्स* < 6 ... (3)

भी, से असमानता (2), हम पास होना 11 - 5 *एक्स* ≤ 1

या - 5 *एक्स* ≤ - 10 यानी, *एक्स* ≥ 2 ... (4)

रेखीय असमानताएँ 97

अगर हम खींचना ग्राफ का असमानता (3) और (4) पर संख्या रेखा, हम देखना वह मान का *एक्स* , कौन हैं सामान्य को दोनों, हैं दिखाया द्वारा बोल्ड रेखा में अंजीर 5.3.



अंजीर 5.3

इस प्रकार, समाधान का प्रणाली हैं असली नंबर *एक्स* झूठ बोलना बीच में 2 और 6 शामिल 2, अर्थात, 2 ≤ *एक्स* < 6

उदाहरण 12 में एक प्रयोग, ए समाधान का हाइड्रोक्लोरिक अम्ल है को होना रखा बीच में

30° और 35° सेल्सियस. क्या है श्रेणी का तापमान में डिग्री फ़ारेनहाइट अगर परिवर्तन

#### 5

FORMULA है दिया गया द्वारा सी = 9 (एफ – 32), कहाँ सी और एफ प्रतिनिधित्व करना तापमान में डिग्री

सेल्सीयस और डिग्री फ़ारेनहाइट, क्रमश।

समाधान यह है दिया गया वह 30 < सी < 35.

#### 5

सी लगाना =

30 <

#### 9

9 (एफ – 32), हम पाना

#### 5

9 (एफ - 32) <35,

#### 9

या 5 *×* (30) < (एफ – 32) < 5 *×* (35)

या 54 < (एफ - 32) < 63

या 86 < एफ < 95.

इस प्रकार, आवश्यक श्रेणी का तापमान है बीच में 86° एफ और 95° एफ।

उदाहरण 13 ए उत्पादक है 600 लीटर का ए 12% समाधान का अम्ल. कैसे अनेक लीटर का ए 30% अम्ल समाधान अवश्य होना जोड़ा को यह इसलिए वह अम्ल सामग्री में इस कारण हुई मिश्रण इच्छा होना अधिक बजाय 15% लेकिन कम बजाय 18%?

समाधान होने देना *एक्स* लीटर की 30% एसिड समाधान है आवश्यक होना जोड़ा गया. तब कुल मिश्रण = ( *एक्स* + 600) लीटर

इसलिए 30% *एक्स* + 12% का 600 > 15% का ( *एक्स* + 600)

और 30% *एक्स* + 12% का 600 < 18% का ( *एक्स* + 600)

30 12 15

या 100 + 100 (600) > 100 ( *एक्स* + 600)

98 गणित

30 12 18

और

100 + 100 (600) < 100 ( *एक्स* + 600)

या 30x *\_* + 7200 > 15 *एक्स* + 9000

और 30 *एक्स* + 7200 < 18 *एक्स* + 10800

या 15 *एक्स* > 1800 और 12 *एक्स* < 3600

या *एक्स* > 120 और *एक्स* < 300,

यानी 120 < *एक्स* < 300

इस प्रकार, संख्या का लीटर का 30% समाधान का अम्ल इच्छा पास होना को होना अधिक बजाय 120 लीटर लेकिन कम बजाय 300 लीटर.

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 5

हल करना असमानता में अभ्यास 1 को 6.

1. 2 ≤ 3 *एक्स* – 4 ≤ 5 2. 6 ≤ – 3 (2 *एक्स* – 4) < 12

3.- *\_* 3 ≤ 4 - 7x *\_* ≤ 18

2

4. − 15 < 3 *(एक्स*

5

2 *)* ≤ 0

5. − 12 < 4 − 3 *एक्स* ≤ 2

− 5

6. 7 ≤ *(* 3 *एक्स* +11 *)* \_≤ 11 ।

2

हल करना असमानता में अभ्यास 7 को 10 और प्रतिनिधित्व करना समाधान रेखांकन पर संख्या रेखा।

7. 5x *\_* + पहला > – 24, 5x *\_* – पहला < 24

8. 2 ( *एक्स* – 1) < *एक्स* + 5, 3 ( *एक्स* + 2) > 2 – *एक्स*

9. 3 *एक्स* – 7 > 2 ( *एक्स* – 6) , 6 – *एक्स* > 11 – 2 *एक्स*

10. 5 (2 *एक्स* – 7) – 3 (2 *एक्स* + 3) ≤ 0 , 2 *एक्स* + 19 ≤ 6 *एक्स* + 47 .

1. ए समाधान है को होना रखा बीच में 68° एफ और 77° एफ। क्या है श्रेणी में तापमान में डिग्री सेल्सीयस (सी) अगर सेल्सीयस / फ़ारेनहाइट (एफ) परिवर्तन FORMULA है दिया गया द्वारा

#### 9

एफ = 5 सी + 32 ?

1. ए समाधान का 8% बोरिक अम्ल है को होना पतला द्वारा जोड़ना ए 2% बोरिक अम्ल समाधान को यह। इस कारण हुई मिश्रण है को होना अधिक बजाय 4% लेकिन कम बजाय 6% बोरिक अम्ल. अगर हम पास होना 640 लीटर का 8% समाधान, कैसे अनेक लीटर का 2% समाधान इच्छा पास होना को होना जोड़ा गया?

रेखीय असमानताएँ 99

1. कैसे अनेक लीटर का पानी इच्छा पास होना को होना जोड़ा को 1125 लीटर का 45% समाधान का अम्ल इसलिए वह इस कारण हुई मिश्रण इच्छा रोकना अधिक बजाय 25% लेकिन कम बजाय 30% अम्ल सामग्री?
2. आईक्यू का ए व्यक्ति है दिया गया द्वारा FORMULA

आईक्यू = एम.ए × 100,

सीए

कहाँ एमए है मानसिक आयु और सीए है कालक्रमबद्ध आयु। अगर 80 ≤ आईक्यू ≤ 140 के लिए ए समूह का 12 साल पुराना बच्चे, खोजो श्रेणी का उनका मानसिक आयु।

*Summary*

�Two real numbers or two algebraic expressions related by the symbols <, >, ≤

or ≥ form an inequality.

�Equal numbers may be added to (or subtracted from ) both sides of an inequality.

�Both sides of an inequality can be multiplied (or divided ) by the same positive number. But when both sides are multiplied (or divided) by a negative number,

then the inequality is reversed.

�The values of *x*, which make an inequality a true statement, are called *solutions of the inequality*.

�To represent *x* < *a* (or *x* > *a*) on a number line, put a circle on the number *a* and dark line to the left (or right) of the number *a*.

�To represent *x* ≤ *a* (or *x* ≥ *a*) on a number line, put a dark circle on the number

*a* and dark the line to the left (or right) of the number *x*.

— **�** —

## अध्याय

100 MATHEMATICS

6

PERMUTATIONS AND COMBINATIONS

� हर *शरीर का खोज है गणितीय में रूप क्योंकि वहाँ है नहीं अन्य मार्गदर्शन हम कर सकना पास होना – डार्विन*

#### परिचय

कल्पना करना आप पास होना ए सूटकेस साथ ए संख्या ताला। संख्या लॉक में 4 पहिये होते हैं जिनमें से प्रत्येक पर 0 से 9 तक 10 अंक अंकित होते हैं। ताला कर सकना होना खुल गया अगर 4 विशिष्ट अंक हैं व्यवस्था की में ए विशिष्ट अनुक्रम साथ नहीं पुनरावृत्ति. कुछ कैसे, आप पास होना भूल गई यह विशिष्ट अनुक्रम का अंक. आप याद करना केवल पहला अंक जो 7 है. खोलने के लिए ताला, कैसे? अनेक दृश्यों का 3 अंक आप मई पास होना को जाँच करना साथ? को उत्तर यह सवाल, आप मई, तुरंत, शुरू प्रविष्टि सभी की संभावित व्यवस्था शेष 9 अंकों में से 3 को लिया गया समय। लेकिन, यह तरीका इच्छा होना थकाऊ, क्योंकि संख्या संभावित अनुक्रम बड़े हो सकते हैं. यहाँ, इस अध्याय में, हम करेगा सीखना कुछ बुनियादी गिनती TECHNIQUES कौन इच्छा

याकूब Bernoulli (1654-1705)

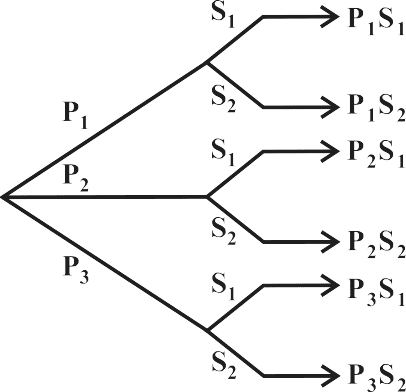
सक्षम हम को उत्तर यह सवाल बिना वास्तव में प्रविष्टि 3 अंकों व्यवस्था. में तथ्य, इन TECHNIQUES इच्छा होना उपयोगी में निर्धारण संख्या का अलग तौर तरीकों का व्यवस्था करना और का चयन वस्तुओं बिना वास्तव में प्रविष्टि उन्हें। जैसा ए पहला कदम, हम करेगा परीक्षण करना ए सिद्धांत कौन है अधिकांश मौलिक को सीखना का इन तकनीकें.

#### मौलिक सिद्धांत का गिनती

आइए निम्नलिखित समस्या पर विचार करें। मोहन के पास 3 पैंट और 2 शर्ट हैं। कितने क्या वह अलग-अलग जोड़ी पैंट और शर्ट पहन सकता है? इसमें 3 तरीके हैं एक पैंट चुना जा सकता है, क्योंकि 3 पैंट उपलब्ध हैं। इसी तरह एक शर्ट भी हो सकती है चुना में 2 तौर तरीकों। के लिए प्रत्येक पसंद का ए पतलून, वहाँ हैं 2 विकल्प का ए कमीज। इसलिए, वहाँ हैं 3 × 2 = 6 जोड़े का ए पंत और ए कमीज।

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 101

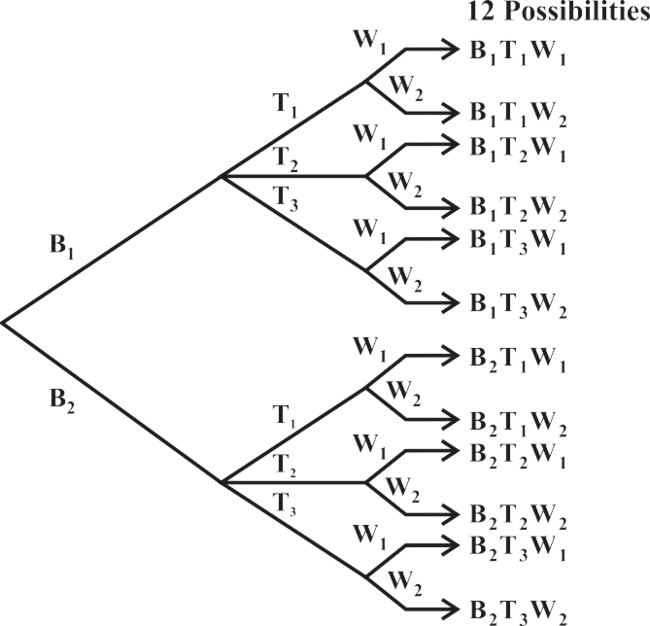
होने देना हम नाम तीन पैंट जैसा पी 1 , पी 2 , पी 3 और दो शर्ट जैसा एस 1 , एस 2 . तब, इन छह संभावनाएं कर सकना होना इलस्ट्रेटेड में अंजीर। 6.1.

होने देना हम विचार करना एक और संकट का वही प्रकार।

सबनम है 2 विद्यालय बैग, 3 टिफिन बक्से और 2 पानी बोतलें. में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना वह ढोना इन सामान (चुनना एक प्रत्येक)।

एक स्कूल बैग 2 में चुना जा सकता है विभिन्न तरीके। एक स्कूल बैग के बाद है चुना गया, एक टिफ़िन बॉक्स 3 में चुना जा सकता है अलग तौर तरीकों। इसलिए, वहाँ हैं 2 × 3 = 6 जोड़े का विद्यालय थैला और ए टिफिन डिब्बा। के लिए प्रत्येक का इन जोड़े ए पानी

बोतल कर सकना होना चुना में 2 अलग तौर तरीकों। अंजीर 6.1

इस तरह, वहाँ हैं 6 × 2 = 12 अलग तौर तरीकों में कौन सा, सबनम कर सकना ढोना इन सामान को विद्यालय। अगर हम नाम 2 विद्यालय थैलियों जैसा बी 1 , बी 2 , तीन टिफिन बक्से जैसा टी 1 , टी 2 , टी 3 और दो पानी बोतलों जैसा डब्ल्यू 1 , डब्ल्यू 2 , इन संभावनाएं कर सकना होना इलस्ट्रेटेड में अंजीर। 6.2.

अंजीर 6.2

102 गणित

वास्तव में, उपरोक्त प्रकार की समस्याओं का समाधान निम्नलिखित को लागू करने से होता है सिद्धांत ज्ञात जैसा *मौलिक सिद्धांत का गिनती* , या, बस, *गुणा सिद्धांत* , कौन राज्य अमेरिका वह

*"अगर एक आयोजन कर सकना घटित होना में एम अलग तौर तरीकों, अगले कौन एक और आयोजन कर सकना घटित होना में एन अलग तौर तरीकों, तब कुल संख्या का घटना का आयोजन में दिया गया आदेश है म×न।”*

उपरोक्त सिद्धांत को किसी भी सीमित संख्या में घटनाओं के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है। के लिए उदाहरण, के लिए 3 आयोजन, सिद्धांत है जैसा इस प्रकार है:

'यदि कोई घटना अलग-अलग तरीकों से घटित हो सकती है *,* तो उसके बाद दूसरी घटना भी भिन्न-भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है घटित होना में *एन* अलग तौर तरीकों, अगले कौन ए तीसरा आयोजन कर सकना घटित होना में *पी* अलग तौर तरीकों, तब कुल संख्या का घटना को 'द आयोजन में दिया गया आदेश है *एम* × *एन* × *पी* ।"

में पहला संकट, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों का पहना हुआ ए पंत और ए कमीज था संख्या का अलग तौर तरीकों का घटना का अगले आयोजन में उत्तराधिकार:

1. की घटना एक चुनना पंत
2. आयोजन का का चयन ए कमीज।

में दूसरा संकट, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों था संख्या का अलग तौर तरीकों का घटना का अगले आयोजन में उत्तराधिकार:

1. आयोजन का का चयन ए विद्यालय थैला
2. आयोजन का का चयन ए टिफिन डिब्बा
3. आयोजन का का चयन ए पानी बोतल।

यहाँ, में दोनों मामले, आयोजन में प्रत्येक संकट सकना घटित होना में विभिन्न संभव आदेश. लेकिन, हम पास होना को चुनना कोई एक का संभव आदेश और गिनती करना संख्या का अलग तौर तरीकों का घटना का आयोजन में यह चुना आदेश देना।

उदाहरण 1 खोजो संख्या का 4 पत्र शब्द, साथ या बिना अर्थ, कौन कर सकना होना ROSE शब्द के अक्षरों से बना है, जहाँ अक्षरों की पुनरावृत्ति नहीं है अनुमत।

समाधान वहाँ हैं जैसा अनेक शब्द जैसा वहाँ हैं तौर तरीकों का भरने में 4 खाली स्थानों द्वारा 4 पत्र, रखते हुए में दिमाग वह दुहराव है नहीं अनुमत।

पहला जगह कर सकना होना भरा हुआ में 4 अलग तौर तरीकों द्वारा कोई भी का 4 पत्र गुलाब। अगले

जो, दूसरा स्थान 3 में शेष 3 अक्षरों में से किसी से भी भरा जा सकता है अलग तौर तरीकों, अगले कौन तीसरा जगह कर सकना होना भरा हुआ में 2 अलग तौर तरीकों; अगले कौन सा, चौथी जगह कर सकना होना भरा हुआ में 1 रास्ता। इस प्रकार, संख्या का तौर तरीकों में कौन 4 स्थानों कर सकना होना भरा हुआ, द्वारा गुणा सिद्धांत, है 4 × 3 × 2 × 1 = 24. इस तरह, आवश्यक संख्या का शब्द है 24.

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 103

�Note If the repetition of the letters was allowed, how many words can be formed?

in 4 different ways. Hence, the required number of words = 4 × 4 × 4 × 4 = 256.

One can easily understand that each of the 4 vacant places can be filled in succession

उदाहरण 2 अलग-अलग रंगों के 4 झंडे दिए गए हैं, कितने अलग-अलग संकेत हो सकते हैं उत्पन्न, यदि कोई संकेत के उपयोग की आवश्यकता है एक के नीचे एक दो झंडे?

समाधान वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक सिग्नल जैसा वहाँ हैं तौर तरीकों का भरने में 2 खाली स्थानों

में उत्तराधिकार द्वारा 4 झंडे का अलग रंग की। अपर खाली जगह कर सकना

होना भरा हुआ में 4 अलग तौर तरीकों द्वारा कोई भी का 4 झंडे; अगले कौन सा, निचला रिक्त स्थान को शेष 3 अलग-अलग झंडों में से किसी एक द्वारा 3 अलग-अलग तरीकों से भरा जा सकता है। इस तरह, द्वारा गुणा सिद्धांत, आवश्यक संख्या का सिग्नल = 4 × 3 = 12.

उदाहरण 3 कैसे अनेक 2 अंक यहां तक की नंबर कर सकना होना बनाया से अंक 1, 2, 3, 4, 5 अगर अंक कर सकना होना दोहराया गया?

समाधान वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक तौर तरीकों जैसा वहाँ हैं तौर तरीकों का भरने 2 खाली स्थानों में उत्तराधिकार द्वारा पाँच दिया गया अंक. यहाँ, में यह मामला, हम शुरू भरने में इकाई का

जगह, क्योंकि विकल्प के लिए यह जगह हैं 2 और 4 केवल और यह कर सकना होना हो गया में 2

तौर तरीकों; अगले कौन दस का जगह कर सकना होना भरा हुआ द्वारा कोई का 5 अंक में 5 अलग तौर तरीकों जैसा अंक कर सकना होना दोहराया गया। इसलिए, द्वारा गुणा सिद्धांत, आवश्यक संख्या का दो अंक यहां तक की नंबर है 2 × 5, अर्थात, 10.

उदाहरण 4 खोजो संख्या का अलग सिग्नल वह कर सकना होना आप जेनरेट हुई द्वारा की व्यवस्था पर कम से कम 2 झंडे में आदेश (एक नीचे अन्य) पर ए खड़ा कर्मचारी, अगर पाँच अलग झंडे हैं उपलब्ध।

समाधान एक सिग्नल में 2 झंडे, 3 झंडे, 4 झंडे या 5 झंडे हो सकते हैं। अब, आइए गिनती करना संभव संख्या का सिग्नल मिलकर का 2 झंडे, 3 झंडे, 4 झंडे और 5 झंडे अलग से और तब जोड़ना संबंधित नंबर.

वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक 2 झंडा सिग्नल जैसा वहाँ हैं तौर तरीकों का भरने में 2 खाली स्थानों

में उत्तराधिकार द्वारा 5 झंडे उपलब्ध। द्वारा गुणा नियम, संख्या का तरीके है 5 × 4 = 20.

इसी प्रकार, वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक 3 झंडा सिग्नल जैसा वहाँ हैं तौर तरीकों का भरने में 3

खाली उत्तराधिकार में स्थान द्वारा 5 झंडे.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

104 गणित

की संख्या तौर तरीकों 5 है ×4×3 = 60. सतत वही रास्ता, हम खोजो वह

संख्या का 4 झंडा सिग्नल = 5 × 4 × 3 × 2 = 120

और यह संख्या का 5 झंडा सिग्नल = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120

इसलिए \_ आवश्यक नहीं का सिग्नल = 20 + 60 + 120 + 120 = 320.

EXERCISE 6.1

1. कैसे अनेक 3 अंकों नंबर कर सकना होना बनाया से अंक 1, 2, 3, 4 और 5 मान लिया जाये वह
   1. दुहराव का अंक है अनुमत?
   2. दुहराव का अंक है नहीं अनुमत?
2. कैसे अनेक 3 अंकों यहां तक की नंबर कर सकना होना बनाया से अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 अगर अंक कर सकना होना दोहराया गया?
3. कैसे अनेक 4 अक्षर कोड कर सकना होना बनाया का उपयोग करते हुए पहला 10 पत्र का अंग्रेज़ी वर्णमाला, अगर नहीं पत्र कर सकना होना दोहराया गया?
4. कैसे अनेक 5 अंकों टेलीफ़ोन नंबर कर सकना होना निर्माण का उपयोग करते हुए अंक 0 को 9 अगर प्रत्येक संख्या प्रारंभ होगा साथ 67 और नहीं अंक प्रकट होता है इससे अधिक एक बार?
5. ए सिक्का है फेंक दिया 3 टाइम्स और परणाम हैं रिकार्ड किया गया. कैसे अनेक संभव परणाम हैं वहाँ?
6. दिया गया 5 झंडे का अलग रंग की, कैसे अनेक अलग सिग्नल कर सकना होना आप जेनरेट हुई अगर प्रत्येक संकेत 2 झंडों के उपयोग की आवश्यकता है, एक नीचे अन्य?

#### क्रमपरिवर्तन

पिछले अनुभाग के उदाहरण 1 में, हम वास्तव में विभिन्न संभावितों की गिनती कर रहे हैं ROSE, REOS, ..., आदि जैसे अक्षरों की व्यवस्था। यहां, इस सूची में, प्रत्येक व्यवस्था अन्य से भिन्न है। दूसरे शब्दों में, अक्षरों को लिखने का क्रम है महत्वपूर्ण। प्रत्येक व्यवस्था है बुलाया ए *परिवर्तन का* 4 *अलग पत्र लिया सभी पर ए समय* । अब, अगर हम पास होना को ठानना संख्या का 3-पत्र शब्द, साथ या बिना अर्थ, जो NUMBER शब्द के अक्षरों से बन सकता है, जहाँ अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, हमें व्यवस्थाओं को NUM गिनने की आवश्यकता है, एनएमयू, एमयूएन, एनयूबी, ..., आदि। यहां, हम 6 अलग-अलग क्रमपरिवर्तनों की गिनती कर रहे हैं एक बार में 3 पत्र लिए गए। शब्दों की आवश्यक संख्या = 6 × 5 × 4 = 120 (उपयोग करके)। गुणा सिद्धांत)

अगर दुहराव का पत्र था अनुमत, आवश्यक संख्या का शब्द चाहेंगे 6 × 6 × 6 = 216 हो।

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 105

परिभाषा 1 ए परिवर्तन है एक व्यवस्था में ए निश्चित आदेश का ए संख्या का वस्तुओं कुछ ले लिया या सभी एक समय में.

में अगले उपधारा, हम करेगा प्राप्त FORMULA आवश्यकता है को उत्तर इन प्रशन तुरंत।

* + 1. *क्रमपरिवर्तन कब सभी वस्तुओं हैं विशिष्ट*

प्रमेय 1 एक समय में *r ली गई n* विभिन्न वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या , जहां 0 < *आर* ≤ *एन* और वस्तुएं दोहराई नहीं जातीं *n* ( *n* - 1) ( *n* - 2) है । . .( *एन* - *आर* + 1), कौन है लक्षित द्वारा *एन* पी *.*

*r*

प्रमाण: रिक्त *स्थान* को भरने के जितने तरीके हैं उतने ही क्रमपरिवर्तन होंगे स्थानों । . . द्वारा

← *आर* खाली स्थानों →

*एन* वस्तुएं. पहला जगह कर सकना होना भरा हुआ में *एन* तौर तरीकों; अगले कौन सा, दूसरा जगह ( *n – 1) तरीकों* से भरा जा सकता है , जिसके बाद तीसरा स्थान ( *n* – 2) से भरा जा सकता है तरीके,..., *r वें स्थान को ( n* – ( *r* – 1)) तरीकों से भरा जा सकता है । इसलिए, की संख्या रिक्त स्थानों को क्रमिक रूप से भरने का तरीका *n* ( *n* - 1) ( *n* - 2) है *।* . . ( *एन* - ( *आर* - 1)) या *एन* ( *एन* – 1) ( *एन* – 2) ... ( *एन* – *आर* + 1)

यह अभिव्यक्ति के लिए *एन* पी है बोझिल और हम ज़रूरत ए अंकन कौन इच्छा मदद को इस अभिव्यक्ति का आकार कम करें. प्रतीक *n* ! (फैक्टोरियल *एन* या *एन* फैक्टोरियल के रूप में पढ़ें) आता है हमारे लिए बचाव। में निम्नलिखित पाठ हम हम सीखेंगे वास्तव में क्या *एन* ! मतलब।

*r*

* + 1. *तथ्यात्मक संकेतन* संकेतन *n* ! प्रथम *n* प्राकृतिक के उत्पाद का प्रतिनिधित्व करता है संख्याएँ, अर्थात् गुणनफल 1 × 2 × 3 ×। . . × ( *n* – 1) × *n को n* ! के रूप में दर्शाया जाता है । हमने इसे पढ़ा प्रतीक जैसा ' *एन* फ़ैक्टोरियल'. इस प्रकार, 1 × 2 × 3 × 4 . . . × ( *एन* – 1) × *एन* = *एन* !

1 = 1 !

1× 2= 2 !

1×2×3 = 3 !

1 × 2 × 3 × 4 = 4 ! और इसी तरह।

हम परिभाषित करना 0 ! = 1

हम कर सकना लिखना 5 ! = 5×4 ! = 5 × 4 ×3 ! = 5 × 4×3 × 2 !

= 5 × 4 × 3 × 2×1!

स्पष्ट रूप से, के लिए ए प्राकृतिक संख्या *एन*

*एन* ! = *एन* ( *एन –* 1) !

*= एन* ( *एन –* 1) ( *एन –* 2) ! [प्रदान किया ( *एन* ≥ 2)]

*= एन* ( *एन –* 1) ( *एन –* 2) ( *एन –* 3) ! [प्रदान किया ( *एन* ≥ 3)]

और इसलिए पर।

106 गणित

उदाहरण 5 मूल्यांकन करना (मैं) 5 ! (ii) 7 ! (iii) 7 ! – 5!

समाधान (i) 5 ! = 1 × 2 × 3× 4 × 5 = 120

(ii) 7 ! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 ×7 = 5040

और (iii) 7 ! – 5! = 5040 – 120 = 4920.

7! 12!

उदाहरण 6 गणना करना (मैं)

5! (ii) ( 10! ) (2!)

समाधान (i) हम पास होना

7!

5! *=*

7 6 × 5!

5!

*=* 7 *×* 6 *=* 42

और (ii) 12! =

( 10! ) ( 2! )

*एन* !

12 × 11 × ( 10! )

( 10! ) × ( 2 )

= 6 × 11 = 66.

उदाहरण 7 मूल्यांकन करना ! ( *एन* − *आर* ) ! , कब *एन* = 5, *आर* = 2.

5!

समाधान हम पास होना को मूल्यांकन करना

2! ( 5 − 2 ) !

(तब से *एन* = 5, *आर* = 2)

हम पास होना

5! = 5! 5 × 4 = 10 .

2 ! ( 5 − 2 ) ! 2! × 3! 2

उदाहरण 8 यदि + 1 = , खोजो *एक्स* ।

8! 9! 10!

8! 9 × 8! 10 × 9 × 8!

1

समाधान हम पास होना 1 + 1 = *एक्स*

इसलिए

1+ \_ 1 =

9 10 × 9

या 10 =

9 10 × 9

तो *एक्स* = 100.

EXERCISE 6.2

1. मूल्यांकन करें

(मैं) 8 ! (ii) 4 ! – 3 !

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 107

8!

2. है 3 ! + 4 ! = 7 ! ? 3. गणना करना

1. यदि + 1

= , खोजो *एक्स*

6! 2! 6! 7! 8!

1

1. मूल्यांकन करना (

*एन* !

– *आर* ) ! , कब

(मैं) *एन* = 6, *आर* = 2 (ii) *एन* = 9, *आर* = 5.

* + 1. *व्युत्पत्ति का FORMULA के लिए एन पी*

*r*

*n* P*r* = (

*n*!

– *r* )!

, 0 ≤ *r* ≤ *n*

होने देना हम अब जाना पीछे को मंच कहाँ हम था निर्धारित किया निम्नलिखित सूत्र:

*एन* पी = *एन* ( *एन* – 1) ( *एन* – 2) . . . ( *एन* – *आर* + 1)

*r*

गुणा करने वाला अंश और भाजक द्वारा ( *एन* - *आर* ) ( *एन* - *आर* – 1) . . . 3× 2 × 1, हम पाते हैं

*एन* पी *आर*

= *एन* ( *एन* 1 ) ( *एन* − 2 ) *...* ( *एन* − *आर* + 1 )( *एन* − *आर* )( *एन* − *आर* − 1 ) *...* 3 × 2 × 1

( *एन* − *आर* )( *एन* − *आर* − 1 ) *...* 3 × 2 × 1

*एन* !

= ( *एन* − *आर* ) ! ,

इस प्रकार

*एन* पी *आर* = (

*एन* !

– *आर* ) ! , कहाँ 0 < *आर* ≤ *एन*

यह बहुत है के लिए अधिक सुविधाजनक अभिव्यक्ति *एन* पी बजाय पिछला।

*r*

में विशिष्ट, कब *आर* = *एन* , *एन* पी *एन*

= *एन* ! = ! 0!

गिनती क्रमपरिवर्तन है केवल गिनती संख्या का तौर तरीकों में कौन कुछ या एक समय में सभी वस्तुएँ पुनर्व्यवस्थित होती हैं। किसी भी वस्तु को व्यवस्थित करना छोड़ने के समान ही है सभी वस्तुओं के पीछे और हम जानते हैं कि ऐसा करने का केवल एक ही तरीका है। इस प्रकार, हम कर सकना पास होना

*एन* पी = 1 =

*एन* ! = *एन* !

... (1)

0 *एन* ! ( *एन* − 0)!

इसलिए, FORMULA (1) है उपयुक्त के लिए *आर* = 0 भी।

इस प्रकार

*एन* पी *आर*

=

*एन* !

( *एन* − *आर* ) !

0 ≤ *आर* ≤ *एन* .

108 गणित

प्रमेय 2 संख्या का क्रमपरिवर्तन का *एन* अलग वस्तुओं लिया *आर* पर ए समय, कहाँ दुहराव है अनुमत, है *एन आर* .

प्रमाण बहुत है के समान की है कि प्रमेय 1 और छोड़ दिया गया है के लिए पाठक को पर पहुंचें। यहाँ, हम हैं सुलझाने कुछ का समस्या का प्रवेशक अनुभाग का उपयोग करते हुए

FORMULA के लिए *एन* पी को उदाहरण देकर स्पष्ट करना इसका उपयोगिता.

*r*

में उदाहरण 1, आवश्यक संख्या का शब्द = 4 पी = 4! = 24. यहाँ दुहराव है

4

नहीं अनुमत। अगर दुहराव है अनुमत, आवश्यक संख्या का शब्द चाहेंगे होना 4 4 = 256. संख्या का 3-पत्र शब्द कौन कर सकना होना बनाया द्वारा पत्र का शब्द

संख्या =

6 पी 3

6!

3! = 4 × 5 × 6= 120. यहाँ, में यह मामला भी, दुहराव है नहीं

अनुमत। अगर दुहराव है अनुमति दी, आवश्यक संख्या का शब्द चाहेंगे होना 6 3 = 216. संख्या का तौर तरीकों में कौन ए अध्यक्ष और ए उपाध्यक्ष कर सकना होना चुना से बीच में ए समूह का 12 व्यक्तियों मान लिया जाये वह एक व्यक्ति कर सकना नहीं पकड़ना अधिक बजाय

एक पद, स्पष्ट रूप से 12 पी 2

12! = 11 × 12 = 132.

10!

* + 1. *क्रमपरिवर्तन जब सभी वस्तुएँ अलग-अलग वस्तुएँ न हों* मान लीजिए हमारे पास है को खोजो संख्या का तौर तरीकों का उलटफेर पत्र का शब्द जड़। में यह मामला, पत्र का शब्द हैं नहीं सभी अलग। वहाँ हैं 2 ओस, कौन हैं का वही दयालु। आइए, अस्थायी रूप से, 2 ओएस को अलग मानें, मान लें, ओ 1 और ओ 2 । की संख्या क्रमपरिवर्तन का 4-अलग पत्र, में यह मामला, लिया सभी पर ए समय

है 4!. विचार करना एक का इन क्रमपरिवर्तन कहना, आरओ हे टी । संगत को यह

1 2

क्रमपरिवर्तन,हम पास होना 2 ! क्रमपरिवर्तन आरओ 1 ओ 2 टी और आरओ 2 ओ 1 टी कौन इच्छा होना बिल्कुल वही क्रमपरिवर्तन यदि O 1 और ओ 2 अलग-अलग नहीं माना जाता है, यानी, यदि ओ 1 और ओ 2 हैं वही हे पर दोनों स्थानों।

इसलिए, आवश्यक संख्या का क्रमपरिवर्तन = 4! 3 × 4 = 12 .

2!

क्रमपरिवर्तन कब हे 1 , ओ 2 क्रमपरिवर्तन हैं कब हे 1 , ओ 2 हैं अलग। वही ओ

आरओ 1 ओ 2 टी 

आरओ हे टी 



आर हे हे टी

2 1 

टी ओ 1 ओ 2 आर 

टी हे हे आर 



टी हे हे आर

2 1 

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 109

आर ओ 1 टी ओ 2 

आर हे टी हे 

2 1 

टी ओ 1 आर ओ 2 

टी हे आर हे 

2 1 

आर टी ओ 1 ओ 2 

आर टी हे हे 

2 1 

टी आर ओ 1 ओ 2 

टी आर हे हे 

2 1 

ओ 1 ओ 2 आर टी  हे हे टी आर 

आर हे टी हे

टी हे आर हे



आर टी हे हे



टी आर हे हे



हे हे आर टी



2 1 

ओ 1 आर ओ 2 टी 

हे आर हे टी 



हे आर हे टी

2 1 

ओ 1 टी ओ 2 आर 

हे टी हे आर 

हे टी हे आर

2 1 

ओ 1 आर टी ओ 2 



हे आर टी हे 

2 1 

ओ 1 टी आर ओ 2 

हे टी आर हे 

2 1 

ओ 1 ओ 2 टी आर 

हे हे टी आर 

हे आर टी हे

हे टी आर हे



हे हे टी आर



2 1 

आइए अब शब्द के अक्षरों को पुनर्व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या ज्ञात करें संस्थान. में यह मामला वहाँ हैं 9 पत्र, में कौन मैं प्रकट होता है 2 टाइम्स और टी प्रकट होता है 3 बार.

अस्थायी रूप से, होने देना हम इलाज इन पत्र अलग और नाम उन्हें जैसा मैं 1 , मैं 2 , टी 1 , टी 2 , टी 3 . संख्या का क्रमपरिवर्तन का 9 अलग पत्र, में यह मामला, लिया सभी पर ए समय है 9 !. ऐसे ही एक क्रमपरिवर्तन पर विचार करें, कहें, मैं 1 एनटी 1 एसआई 2 टी 2 यूई टी 3 . यहाँ अगर मैं 1 , मैं 2 हैं नहीं वही

110 गणित

और T 1 , T 2 , T 3 समान नहीं हैं, तो I 1 , I 2 को 2 में व्यवस्थित किया जा सकता है! तरीके और T 1 , T 2 , T 3 कर सकते हैं होना व्यवस्था की में 3! तौर तरीकों। इसलिए, 2! × 3! क्रमपरिवर्तन इच्छा होना अभी वही परिवर्तन संगत को यह चुना परिवर्तन आई 1 एनटी 1 एसआई 2 टी 2 यूईटी 3 । इस तरह, कुल संख्या का

अलग क्रमपरिवर्तन इच्छा होना 9!

2! 3!

हम कर सकना राज्य (बिना सबूत) अगले प्रमेय:

प्रमेय 3 संख्या का क्रमपरिवर्तन का *एन* वस्तुएं, कहाँ *पी* वस्तुओं हैं का

!

वही दयालु और बाकी सभी अलग-अलग हैं =

*पी* ! .

में तथ्य, हम पास होना ए अधिक सामान्य प्रमेय.

प्रमेय 4 संख्या का क्रमपरिवर्तन का *एन* वस्तुएं, कहाँ *पी* 1 वस्तुओं हैं का एक

दयालु *, पी* 2

हैं का दूसरा दयालु, ..., *पी के*

हैं का *क* वें दयालु और आराम, अगर कोई भी, हैं का अलग

दयालु है

*एन* ! .

*पी* 1 ! *पी* 2 ! *... पी के* !

उदाहरण 9 खोजो संख्या का क्रमपरिवर्तन का पत्र का शब्द इलाहाबाद।

समाधान यहाँ, वहाँ हैं 9 वस्तुओं (पत्र) का कौन वहाँ हैं 4ए, 2 एल का और आराम हैं सभी अलग।

इसलिए, आवश्यक संख्या का व्यवस्था = 9!

= 5 × 6 × 7 × 8 × 9

= 7560

4! 2! 2

उदाहरण 10 यदि 1 से 9 तक के अंकों का उपयोग करके 4 अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं दुहराव का अंक है नहीं अनुमत?

समाधान यहां क्रम मायने रखता है उदाहरण के लिए 1234 और 1324 दो अलग-अलग संख्याएं हैं। इसलिए, वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक 4 अंक नंबर जैसा वहाँ हैं क्रमपरिवर्तन का 9 अलग अंक लिया 4 पर ए समय।

इसलिए, आवश्यक 4 अंक नंबर

9 पी = 9! = 9! = 9 × 8 × 7 × 6 = 3024.

4 ( 9 – 4 ) ! 5!

उदाहरण 11 कैसे अनेक नंबर झूठ बोलना बीच में 100 और 1000 कर सकना होना बनाया साथ अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5, अगर दुहराव का अंक है नहीं अनुमत?

समाधान हर नंबर 100 के बीच और 1000 है ए 3 अंकों संख्या। हम, पहला, पास होना को

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 111

एक समय में 3 लिए गए 6 अंकों के क्रमपरिवर्तन की गणना करें। यह संख्या 6 P होगी . लेकिन, इन क्रमपरिवर्तन इच्छा शामिल करना वे भी कहाँ 0 है पर 100 का जगह। के लिए उदाहरण, 092, 042, , वगैरह हैं ऐसा नंबर कौन हैं वास्तव में 2 अंकों नंबर और इस तरह

3

संख्या का ऐसा नंबर है को होना घटाया से 6 पी को पाना आवश्यक संख्या। को पाना संख्या का ऐसा संख्याएँ, हम हल करना 0 पर 100 का जगह और को पुनर्व्यवस्थित शेष 5 अंक ले रहा 2 पर ए समय। यह संख्या है 5 पी . इसलिए

3

2

आवश्यक संख्या

= 6 पी

5 पी = 6! − 5!

3  2  3! 3!

= 4 × 5 × 6 – 4 ×5 = 100

उदाहरण 12 खोजो कीमत का *एन* ऐसा वह

(मैं)

*एन* पी 5

42 *एन* पी 3 *, एन* > 4

(ii)

*एन* पी 4

*एन* -1 पी 4

5

3 , *एन* > 4

समाधान (मैं) दिया गया वह

*एन* पी 5 = 42 *एन* पी 3

या *एन* ( *एन* – 1) ( *एन* – 2) ( *एन* – 3) ( *एन* – 4) = 42 *एन* ( *एन* – 1) ( *एन* – 2)

चूंकि *एन* > 4 तो *एन* ( *एन* – 1) ( *एन* – 2) ≠ 0 इसलिए, विभाजित करके दोनों पक्षों *एन* द्वारा ( *एन* – 1) ( *एन* – 2), हम पाना

( *एन* - 3 ( *एन* - 4) = 42

या *एन* 2 - 7 *एन* - 30 = 0

या *एन* 2 – 10 *एन* + 3 *एन* – 30

या ( *एन* – 10) ( *एन* + 3) = 0

या *एन* – 10 = 0 या *एन* + 3 = 0

या *एन* = 10 या *एन* = – 3 जैसा *एन* नही सकता होना नकारात्मक, इसलिए *एन* = 10.

(ii) दिया गया वह

*एन* पी 4 5

*एन* -1 पी 4 3

इसलिए 3 *एन* ( *एन* – 1) ( *एन* – 2) ( *एन* – 3) = 5( *एन* – 1) ( *एन* – 2) ( *एन* – 3) ( *एन* – 4)

या 3 *एन* = 5 ( *एन* – 4) [जैसे ( *एन* – 1) ( *एन* – 2) ( *एन* – 3) ≠ 0, *एन* > 4] या *एन* = 10.

112 गणित

उदाहरण 13 खोजें *आर* , यदि 5 4 पी = 6 5 पी .

*r* *r*–1

समाधान हम पास होना 5

4 पी *आर*

= 6 5 पी *आर* 1

या 5 ×

4!

( 4 − *आर* ) !

= 6 ×

5!

( 5 − *आर* + 1 ) !

या 5! = 6 × 5!

( 4 − *आर* ) ! ( 5 − *आर* +1 ) \_ ( 5 − *आर* )( 5 − *आर* - 1 ) !

या (6 – *आर* ) (5 – *आर* ) = 6

या *आर* 2 – 11 *आर* + 24= 0

या *आर* 2 – 8 *आर* – 3 *आर* + 24 = 0

या ( *आर* – 8) ( *आर* – 3) = 0

या *आर* = 8 या *आर* = 3.

अत: *r* = 8, 3.

उदाहरण 14 खोजो संख्या का अलग 8 अक्षर व्यवस्था वह कर सकना होना बनाया से पत्र का शब्द बेटी इसलिए वह

1. सभी स्वर घटित होना एक साथ (ii) सभी स्वर करना नहीं घटित होना एक साथ।

समाधान (i) DAUGHTER शब्द में 8 अलग-अलग अक्षर हैं, जिनमें हैं 3 स्वर, अर्थात्, ए, यू और इ। तब से स्वर पास होना को घटित होना एक साथ, हम कर सकना के लिए समय प्राणी, मान लीजिए उन्हें जैसा ए अकेला वस्तु (एयूई)। यह अकेला वस्तु एक साथ साथ 5 शेष पत्र (वस्तुएँ) इच्छा होना गिना हुआ जैसा 6 वस्तुएं. तब हम गिनती करना क्रमपरिवर्तन

का इन 6 वस्तुओं लिया सभी पर ए समय। यह संख्या चाहेंगे होना 6 पी = 6!. संगत को

6

प्रत्येक का इन क्रमपरिवर्तन, हम करेगा पास होना 3! क्रमपरिवर्तन का तीन स्वर ए, यू, इ एक समय में सभी लिया गया. अत: गुणन सिद्धांत द्वारा आवश्यक संख्या क्रमपरिवर्तन = 6 ! × 3 ! = 4320.

1. यदि हमें उन क्रमपरिवर्तनों को गिनना है जिनमें सभी स्वर कभी नहीं होते एक साथ, हमें सबसे पहले एक बार में 8 अक्षरों की सभी संभावित व्यवस्थाएं ढूंढनी होंगी, कौन कर सकना होना हो गया में 8! तौर तरीकों। तब, हम पास होना को घटाना से यह संख्या, संख्या का क्रमपरिवर्तन में कौन स्वर हैं हमेशा एक साथ।

इसलिए, आवश्यक संख्या 8 ! – 6 ! × 3 ! = 6 ! (7×8 – 6)

= 2 × 6 ! (28 – 3)

= 50 × 6 ! = 50 × 720 = 36000

उदाहरण 15 4 लाल, 3 पीली और 2 हरी डिस्क को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है ए पंक्ति अगर डिस्क का वही रंग हैं अविवेच्य ?

समाधान कुल संख्या का डिस्क हैं 4 + 3 + 2 = 9. बाहर का 9 डिस्क, 4 हैं का पहला दयालु

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 113

(लाल), 3 हैं का दूसरा दयालु (पीला) और 2 हैं का तीसरा दयालु (हरा)। इसलिए, संख्या का व्यवस्था 9! 1260 .

4! 3! 2!

उदाहरण 16 खोजो संख्या का व्यवस्था का पत्र का शब्द आजादी। में कैसे अनेक का इन व्यवस्था,

1. करना शब्द शुरू साथ पी
2. सब करो स्वरों हमेशा एक साथ घटित होते हैं
3. करना स्वर कभी नहीं घटित होना एक साथ
4. करना शब्द शुरू साथ मैं और अंत में पी?

समाधान वहाँ हैं 12 पत्र, का कौन एन प्रकट होता है 3 समय, इ प्रकट होता है 4 टाइम्स और डी प्रकट होता है 2 टाइम्स और आराम हैं सभी अलग। इसलिए

आवश्यक की संख्या व्यवस्था

= 12! = 1663200 3! 4! 2!

1. होने देना हम हल करना पी पर चरम बाएं पद, हम, तब, गिनती करना व्यवस्था का शेष 11 पत्र. इसलिए, आवश्यक संख्या का शब्द शुरुआत साथ पी

= 11!

3! 2! 4!

= 138600 .

1. वहाँ हैं 5 स्वर में दिया गया शब्द, कौन हैं 4 तों और 1 मैं। तब से, वे पास होना

को हमेशा घटित होना एक साथ, हम इलाज उन्हें जैसा ए अकेला के लिए वस्तु समय

EEEEI

प्राणी। यह अकेला वस्तु एक साथ साथ 7 शेष वस्तुओं इच्छा खाता के लिए 8 वस्तुएं. इन 8 वस्तुएं, में कौन वहाँ हैं 3एन.एस और 2 डीएस, कर सकना होना पुन: व्यवस्थित में

8!

3! 2! तौर तरीकों। संगत को प्रत्येक का इन व्यवस्था, 5 स्वर इ, इ, इ,

5!

इ और मैं कर सकना होना पुन: व्यवस्थित में 4! तौर तरीकों। इसलिए, द्वारा गुणा सिद्धांत,

आवश्यक संख्या का व्यवस्था

= 8! × 5! = 16800

3! 2! 4!

1. आवश्यक संख्या का व्यवस्था

= कुल संख्या का व्यवस्था (बिना कोई प्रतिबंध) – संख्या का व्यवस्था कहाँ सभी स्वर घटित होना एक साथ।

114 गणित

= 1663200 – 16800 = 1646400

1. होने देना हम हल करना मैं और पी पर चरम समाप्त होता है (मैं पर बाएं अंत और पी पर सही अंत)। हम हैं बाएं साथ 10 पत्र.

इस तरह, आवश्यक संख्या का व्यवस्था

10!

= 3! 2! 4! = 12600

EXERCISE 6.3

1. कैसे अनेक 3 अंकों नंबर कर सकना होना बनाया द्वारा का उपयोग करते हुए अंक 1 को 9 अगर नहीं अंक है दोहराया गया?
2. कैसे अनेक 4 अंक नंबर हैं वहाँ साथ नहीं अंक दोहराया गया?
3. कैसे अनेक 3 अंकों यहां तक की नंबर कर सकना होना बनाया का उपयोग करते हुए अंक 1, 2, 3, 4, 6, 7, अगर नहीं अंक है दोहराया गया?
4. खोजो संख्या का 4 अंक नंबर वह कर सकना होना बनाया का उपयोग करते हुए अंक 1, 2, 3, 4, 5 अगर नहीं अंक है दोहराया गया। कैसे अनेक का इन इच्छा होना यहां तक की?
5. से ए समिति का 8 व्यक्ति, में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना हम चुनना ए अध्यक्ष और ए उपाध्यक्ष अध्यक्ष मान लिया जाये एक व्यक्ति कर सकना नहीं पकड़ना अधिक बजाय एक पद?
6. खोजो *एन* अगर *एन* – 1 पी : *एन* पी = 1 : 9.

3 4

1. खोजो *आर* अगर (मैं) 5 पी *आर* = 2 6 पी *आर* 1 (ii) 5 पी *आर* = 6 पी *आर* 1 .
2. कैसे अनेक शब्द, साथ या बिना अर्थ, कर सकना होना बनाया का उपयोग करते हुए सभी पत्र का शब्द समीकरण, का उपयोग करते हुए प्रत्येक पत्र बिल्कुल एक बार?
3. के अक्षरों से अर्थ सहित अथवा अर्थ रहित कितने शब्द बनाये जा सकते हैं शब्द सोमवार, मान लीजिए वह कोई पत्र नहीं दोहराया जाता है, अगर।
   1. 4 पत्र हैं इस्तेमाल किया गया पर ए समय, (ii) सभी पत्र हैं इस्तेमाल किया गया पर ए समय,

(iii) सभी पत्र हैं इस्तेमाल किया गया लेकिन पहला पत्र है ए स्वर?

1. में कैसे अनेक का विशिष्ट क्रमपरिवर्तन का पत्र में मिसिसिपी करना चार है नहीं आना एक साथ?
2. में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना पत्र का शब्द क्रमपरिवर्तन होना व्यवस्था की अगर
   1. शब्द शुरू साथ पी और अंत साथ एस, (ii) स्वर हैं सभी एक साथ,

(iii) वहाँ हैं हमेशा 4 पत्र बीच में पी और एस?

#### युग्म

आइए अब मान लें कि 3 लॉन टेनिस खिलाड़ियों X, Y, Z का एक समूह है। A टीम मिलकर का 2 खिलाड़ियों है को होना बनाया। में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना हम करना इसलिए? है टीम का एक्स और वाई अलग से टीम का वाई और एक्स ? यहाँ, आदेश है नहीं महत्वपूर्ण। में तथ्य, वहाँ हैं केवल 3 संभव तौर तरीकों में कौन टीम सकना होना निर्मित.

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 115



अंजीर। 6.3

इन हैं एक्सवाई, YZ और ZX (अंजीर 6.3).

यहां, प्रत्येक चयन को *एक समय में 2 ली गई 3 अलग-अलग वस्तुओं का संयोजन कहा जाता है* । में ए संयोजन, आदेश है नहीं महत्वपूर्ण।

अब विचार करना कुछ अधिक चित्रण.

बारह व्यक्तियों मिलो में ए कमरा और प्रत्येक शेक हाथ साथ सभी अन्य। कैसे करना हम हाथ मिलाने की संख्या निर्धारित करते हैं। X, Y से और Y, X से हाथ मिलाएगा नहीं होना दो अलग हाथ हिलाता है. यहाँ, आदेश है नहीं महत्वपूर्ण। वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक हाथ मिलाना जैसा वहाँ हैं के संयोजन 12 अलग चीज़ें आक्रांत 2 पर ए समय।

एक वृत्त पर सात बिंदु स्थित हैं। इन्हें जोड़कर कितनी तारें खींची जा सकती हैं अंक जोड़ीवार? वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक कॉर्ड्स जैसा वहाँ हैं युग्म का 7 अलग चीज़ें लिया 2 पर ए समय।

अब, हम प्राप्त FORMULA के लिए खोज संख्या का युग्म का *एन* अलग वस्तुओं लिया *आर* पर ए समय, लक्षित द्वारा *एन* सी ..

*r*

कल्पना करना हम पास होना 4 अलग वस्तुओं ए, बी, सी और डी। ले रहा 2 पर ए समय, अगर हम पास होना को बनाना संयोजन, इन इच्छा होना एबी, एसी, एडी, ई.पू., बीडी, सीडी. यहाँ, अब और बी ० ए हैं वही संयोजन जैसा आदेश करता है नहीं ऑल्टर संयोजन। यह है क्यों हम पास होना नहीं शामिल बी ० ए, सीए, डीए, सीबी, डाटाबेस और डीसी में यह सूची। वहाँ हैं जैसा अनेक जैसा 6 के संयोजन 4 अलग वस्तुओं लिया 2 पर ए समय, यानी, 4 सी = 6.

2

संगत को प्रत्येक संयोजन में सूची, हम कर सकना आना पर 2! क्रमपरिवर्तन जैसा प्रत्येक संयोजन में 2 वस्तुओं को 2 में पुनर्व्यवस्थित किया जा सकता है! तौर तरीकों। इसलिए, की संख्या क्रमपरिवर्तन = 4 सी × 2!.

2

पर अन्य हाथ, संख्या का क्रमपरिवर्तन का 4 अलग चीज़ें लिया 2 पर ए समय = 4 पी .

2

4 4 4! = 4 सी

इसलिए

पी 2 = सी 2 **×** 2! या ( 4 − 2 ) ! 2! 2

अब, होने देना हम कल्पना करना वह हम पास होना 5 अलग वस्तुओं ए, बी, सी, डी, इ। ले रहा 3 पर ए समय, अगर हम पास होना को बनाना संयोजन, इन इच्छा होना एबीसी, एबीडी, अबे, बीसीडी, ईसा पूर्व,

सीडीई, ऐस, एसीडी, एडीई, बीडीई. संगत को प्रत्येक का इन 5 सी संयोजन, वहाँ

3

हैं 3! क्रमपरिवर्तन, क्योंकि, तीन वस्तुओं में प्रत्येक संयोजन कर सकना होना

116 गणित

पुन: व्यवस्थित में 3 ! तौर तरीकों। इसलिए, कुल का क्रमपरिवर्तन = 5 सी 3 3!

इसलिए

5 पी =

3

5!

सी 3 × 3! या ( 5 − 3 ) ! 3!

5

= 5 सी 3

इन उदाहरण सुझाव देना अगले प्रमेय दिखा संबंध बीच में परिवर्तन और संयोजन:

प्रमेय 5

*एन* पी *आर* = *एन* सी *आर आर* ! , 0 < *आर* ≤ *एन* ।

सबूत संगत को प्रत्येक संयोजन का *एन* सी , हम पास होना *आर* ! क्रमपरिवर्तन, क्योंकि

*r*

*आर* वस्तुओं में हर संयोजन कर सकना पुनर्व्यवस्थित किया जाए में *आर* ! तौर तरीकों।

एक समय में *n* विभिन्न चीजों के क्रमपरिवर्तन की कुल संख्या *r ली गई* है *एन* सी × *आर* !। पर अन्य हाथ, यह है *एन* पी *आर* . इस प्रकार

*r*

*एन* पी *आर*

*एन* सी *आर* × *आर* ! , 0 < *आर* ≤ *एन* .

*टिप्पणी* 1. से ऊपर

में विशिष्ट, अगर *आर*  *एन* , *एन* सी

*एन* !

( *एन* − *आर* ) !

*एन* !

*एन* सी *आर* एक्स

= 1 .

! , वह है,

*एन*  *एन* !

*आर* ! ( *एन* − *आर* ) !

C*r* = .

*एन*  *एन* ! 0!

1. हम परिभाषित करना *एन* सी = 1, अर्थात, संख्या का युग्म का *एन* अलग चीज़ें लिया

0

कुछ नहीं पर सभी है माना को होना 1. गिनती युग्म है केवल गिनती उन तरीकों की संख्या जिनमें एक समय में कुछ या सभी वस्तुओं का चयन किया जाता है। चुनना कुछ नहीं पर सभी है वही जैसा छोड़कर पीछे सभी वस्तुओं और हम जानना वह वहाँ है ऐसा करने का केवल एक ही तरीका है. इस प्रकार हम परिभाषित करते हैं *एन* सी = 1.

0

=

1. जैसा

*एन* !

0! ( *एन* − 0 ) !

= 1 = *एन* सी 0

, FORMULA *एन* करोड़ *\_*

*एन* !

*आर* ! ( *एन* − *आर* ) !

है उपयुक्त के लिए *आर* = 0 भी।

इस तरह

*एन* करोड़ *\_* =

*एन* !

*आर* ! ( *एन* - *आर* ) ! , 0 ≤ *आर* ≤ *एन* ।

1. *नहीं*

सी *एन* - *आर* = (

*नहीं* !

– *आर* ) ! ( *एन* − ( *एन* − *आर* ) ) !

*एन* !

= ( *एन* − *आर* ) ! *आर* !

= *एन* करोड़ *\_* ,

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 117

अर्थात, का चयन *आर* वस्तुओं बाहर का *एन* वस्तुओं है वही जैसा अस्वीकार किया ( *एन* – *आर* ) वस्तुएं.

1. *एन* सी = *एन* सी ⇒ *ए* = *बी* या *ए* = *एन* – *बी,* अर्थात, *एन* = *ए* + *बी*

*a* *b*

प्रमेय 6

*एन* करोड़ *\_* + *एन* करोड़ *\_* − 1 = *एन* + 1 सी *आर*

सबूत हम पास होना

*एन* करोड़ *\_* + *एन* सी *आर* - 1 =

*एन* !

*एन* !

*आर* ! ( *एन* − *आर* ) !

+

*एन* !

( *आर* - 1 ) ! ( *एन* − *आर* + 1 ) !

*एन* !

= × ( *आर* - 1 ) ! ( *एन* − *आर* ) ! + (

- 1 ) ! ( *एन* − *आर* + 1 ) ( *एन* − *आर* ) !

*एन* !

=

 1 + 1 

( - 1 ) ! ( *एन* − *आर* ) !  *आर*  *एन* − *आर* + 1 \_ \_

= ! × *एन*  *आर* +1 \_ + *आर*

= ( *एन* + 1 ) ! = *एन* + 1 सी

( *आर* 1 ) ! ( *एन* − *आर* ) ! *आर* ( *एन* − *आर* + 1 )

*आर* ! ( *एन* +1 \_ − *आर* ) ! *आर*

उदाहरण 17 अगर

*एन* सी 9 =

*एन* सी 8 , खोजो *एन* सी 17 .

समाधान हम पास होना

*एन* सी 9 =

*एन* सी 8

वह है,

*एन* ! = *एन* !

9! ( *एन* − 9 ) ! ( *एन* − 8 ) ! 8!

या 1 = 1

या *एन* – 8 = 9 या *एन* = 17

इसलिए

9 8

*एन* सी 17 = 17 सी 17 = 1 .

उदाहरण 18 ए समिति का 3 व्यक्तियों है को होना गठित से ए समूह का 2 पुरुषों और 3 औरत। में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना यह होना हो गया? कैसे अनेक का इन समितियों चाहेंगे निहित होना 1 पुरुष और 2 महिलाओं का?

समाधान यहां, क्रम मायने नहीं रखता. इसलिए, हमें संयोजनों की गणना करने की आवश्यकता है। वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक समितियों जैसा वहाँ हैं युग्म का 5 अलग व्यक्तियों

लिया 3 पर ए समय। इस तरह, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों = 5 सी =

5! = 4 5 = 10 .

3  3! 2! 2

अब, 1 आदमी कर सकना होना चयनित से 2 पुरुषों में 2 सी तौर तरीकों और 2 औरत कर सकना होना

1

चयनित से 3 औरत में 3 सी तौर तरीकों। इसलिए, आवश्यक संख्या का समितियों

2

118 गणित

2 सी × 3 सी

= 2! × 3! = 6

= 1 2

1! 1! 2! 1! .

उदाहरण 19 क्या है संख्या का तौर तरीकों का का चयन 4 पत्ते से ए सामान बाँधना का 52 खेलना पत्ते? इनमें से कितने में

1. चार पत्ते हैं का वही सुविधाजनक होना,
2. चार पत्ते संबंधित को चार अलग सूट,
3. हैं चेहरा पत्ते,
4. दो हैं लाल पत्ते और दो हैं काला पत्ते,
5. पत्ते हैं का वही रंग?

समाधान वहाँ इच्छा होना जैसा अनेक तौर तरीकों का का चयन 4 पत्ते से 52 पत्ते जैसा वहाँ हैं युग्म का 52 अलग चीज़ें, लिया 4 पर ए समय। इसलिए

52 सी =

52!

= 49 × 50 × 51 × 52

आवश्यक संख्या का तौर तरीकों =

4  4! 48! 2 × 3 × 4

= 270725

1. चार सूट हैं: हीरा, क्लब, कुदाल, दिल और प्रत्येक के 13 कार्ड हैं सुविधाजनक होना। इसलिए, वहाँ हैं 13 सी तौर तरीकों का का चयन 4 हीरे. इसी प्रकार, वहाँ हैं 13 सी तौर तरीकों का का चयन 4 क्लब, 13 सी तौर तरीकों का का चयन 4 कुक्म के पत्ते और 13 सी तौर तरीकों का का चयन 4 दिल. इसलिए

4

4 4 4

आवश्यक संख्या का तौर तरीकों = 13 सी + 13 सी + 13 सी + 13 सी .

4 4 4 4

=

1. वहाँ हैं13 पत्ते में प्रत्येक सुविधाजनक होना।

4 × 13!

4! 9!

= 2860

13 C हैं हीरे के 13 पत्तों में से 1 पत्ता चुनने के तरीके, दिल के 13 पत्तों में से 1 कार्ड चुनने के 13 सी तरीके, 1 चुनने के 13 सी तरीके क्लबों के 13 कार्डों में से कार्ड, 13 सी 13 पत्तों में से 1 पत्ता चुनने के तरीके हुकुम. इस तरह, द्वारा गुणा सिद्धांत, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों

1

1

1 1

= 13 सी × 13 सी × 13 सी × 13 सी = 13 4

1 1 1 1

1. वहाँ हैं 12 चेहरा पत्ते और 4 हैं को होना चयनित बाहर का इन 12 पत्ते। यह कर सकना होना

12!

हो गया में 12 सी

4

तौर तरीकों। इसलिए, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों =

4! 8!

= 495 .

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 119

1. वहाँ हैं 26 लाल पत्ते और 26 काला पत्ते। इसलिए, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों = 26 सी × 26 सी

2 2

 2 6 ! 2 \_

=  2 ! 2 4 ! 

 

= ( 32 5 ) 2 = 105625

1. 4 26 सी में 26 लाल कार्डों में से लाल कार्डों का चयन किया जा सकता है 4 काला पत्ते कर सकना होना चयनित बाहर का 26 काला पत्ते में 26 सी तौर तरीकों।

4

4

तौर तरीकों।

इसलिए, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों = 26 सी + 26 सी

4 4

= 2 ×

26!

4! 22!

= 29900.

1. अगर *एन* सी = *एन* सी , खोजो *एन* सी .

EXERCISE 6.4

8 2 2

1. *एन* निर्धारित करेंअगर

(मैं) 2 *एन* सी : *एन* सी = 12 : 1 (ii) 2 *एन* सी : *एन* सी = 11 : 1

3 3 3 3

1. कैसे कई तार हो सकते हैं अनिर्णित 21 बिंदुओं के माध्यम से एक वृत्त पर?
2. में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना ए टीम का 3 लड़के और 3 लड़कियाँ होना चयनित से 5 लड़के और 4 लड़कियाँ?
3. खोजो संख्या का तौर तरीकों का का चयन 9 गेंदों से 6 लाल गेंदें, 5 सफ़ेद गेंदों और 5 नीला गेंदों अगर प्रत्येक चयन बना होना का 3 गेंदों का प्रत्येक रंग।
4. ठानना की संख्या 5 कार्ड युग्म बाहर का ए जहाज़ की छत का 52 पत्ते अगर वहाँ है बिल्कुल एक ऐस में प्रत्येक संयोजन।
5. 17 खिलाड़ियों में से ग्यारह खिलाड़ियों की एक क्रिकेट टीम कितने तरीकों से चुनी जा सकती है? कौन केवल 5 खिलाड़ियों कर सकना कटोरा अगर प्रत्येक क्रिकेट टीम का 11 अवश्य शामिल करना बिल्कुल 4 गेंदबाज?
6. ए थैला रोकना 5 काला और 6 लाल गेंदें. ठानना संख्या का तौर तरीकों में कौन 2 काला और 3 लाल गेंदों कर सकना होना चयनित।
7. एक छात्र कितने तरीकों से 5 पाठ्यक्रमों का कार्यक्रम चुन सकता है यदि 9 पाठ्यक्रम हैं हैं उपलब्ध और 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम हैं अनिवार्य के लिए प्रत्येक विद्यार्थी?

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 20 कैसे अनेक शब्द, साथ या बिना अर्थ, प्रत्येक का 3 स्वर और 2 व्यंजन कर सकना होना बनाया से पत्र का शब्द उलझा हुआ ?

समाधान में शब्द शामिल करें, वहाँ हैं 4 स्वर, अर्थात्, मैं,ओ,ई,उऔर 4 व्यंजन, अर्थात्, एन, वी, एल और टी।

120 गणित

जो नंबर का तौर तरीकों का का चयन 3 स्वर बाहर का 4 = 4 सी = 4.

3

संख्या का तौर तरीकों का का चयन 2 व्यंजन बाहर का 4 = 4 सी = 6.

2

इसलिए, संख्या का युग्म का 3 स्वर और 2 व्यंजन है 4 × 6 = 24.

अब, प्रत्येक का इन 24 युग्म है 5 पत्र कौन कर सकना होना व्यवस्था की के बीच खुद में 5 ! तौर तरीकों। इसलिए, आवश्यक संख्या का अलग शब्द है 24 × 5 ! = 2880.

उदाहरण 21 ए समूह से मिलकर बनता है 4 लड़कियाँ और 7 लड़के। में कैसे कई विधियां कर सकना ए की टीम 5 सदस्यों होना चयनित अगर टीम है (मैं) नहीं लड़की ? (ii) पर कम से कम एक लड़का और एक लड़की ?

(iii) पर कम से कम 3 लड़कियाँ ?

समाधान (i) चूँकि, टीम नहीं करेगी किसी भी लड़की को शामिल करें, इसलिए, केवल लड़कों को ही शामिल किया जाएगा चयनित। 5 लड़के बाहर का 7 लड़के कर सकना होना चयनित में 7 सी तौर तरीकों। इसलिए, आवश्यक

5

7 सी 7!

= 6 × 7 = 21

संख्या का तरीके =

5  5! 2! 2

1. तब से, पर कम से कम एक लड़का और एक लड़की हैं को होना वहाँ में प्रत्येक टीम। इसलिए, टीम कर सकना निहित होना का
   1. 1 लड़का और 4 लड़कियाँ (बी) 2 लड़के और 3 लड़कियाँ

(सी) 3 लड़के और 2 लड़कियाँ (डी) 4 लड़के और 1 लड़की।

1 लड़का और 4 लड़कियाँ कर सकना होना चयनित में 7 सी × 4 सी तौर तरीकों। 2 लड़के और 3 लड़कियाँ कर सकना होना चयनित में 7 सी × 4 सी तौर तरीकों। 3 लड़के और 2 लड़कियाँ कर सकना होना चयनित में 7 सी × 4 सी तौर तरीकों। 4 लड़के और 1 लड़की कर सकना होना चयनित में 7 सी × 4 सी तौर तरीकों।

1 4

2 3

3 2

4 1

इसलिए, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों

= 7 सी × 4 सी + 7 सी × 4 सी + 7 सी × 4 सी + 7 सी × 4 सी

1 4 2 3 3 2 4 1

= 7 + 84 + 210 + 140 = 441

1. चूँकि, टीम सम्मिलित होना होगा का पर कम से कम 3 लड़कियाँ, टीम शामिल हो सकते हैं का
   1. 3 लड़कियाँ और 2 लड़के, या (बी) 4 लड़कियाँ और 1 लड़का।

टिप्पणी वह टीम नही सकता पास होना सभी 5 लड़कियाँ, क्योंकि, समूह है केवल 4 लड़कियाँ।

1. लड़कियाँ और 2 लड़के कर सकना होना चयनित 4 सी में × 7 सी

3

2

तौर तरीकों।

1. लड़कियाँ और 1 लड़का कर सकना होना चयनित में 4 सी × 7 सी

4

1

तौर तरीकों।

इसलिए, आवश्यक संख्या का तौर तरीकों

= 4 सी 3 × 7 सी 2 + 4 सी 4 × 7 सी 1 = 84 + 7 = 91

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 121

उदाहरण 22 अर्थ सहित या बिना अर्थ वाले शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए जिन्हें बनाया जा सकता है का उपयोग करते हुए सभी पत्र का शब्द दोबारा। अगर इन शब्द हैं लिखा हुआ जैसा में ए शब्दकोष, क्या इच्छा होना 50 वाँ शब्द?

समाधान वहाँ हैं 5 पत्र में शब्द दोबारा, में कौन ए प्रकट होता है 2 बार. इसलिए,

आवश्यक संख्या का शब्द = 5! = 60 .

2!

को पाना संख्या का शब्द शुरुआत साथ ए, हम हल करना पत्र ए पर चरम बाएं पद, हम तब को पुनर्व्यवस्थित शेष 4 पत्र लिया सभी पर ए समय। वहाँ इच्छा होना जैसा इन 4 अक्षरों की कई व्यवस्थाएँ एक समय में 4 ली गई हैं क्योंकि 4 का क्रमपरिवर्तन होता है अलग चीज़ें लिया 4 पर ए समय। इस तरह, संख्या का शब्द शुरुआत साथ

4!

ए = 4! = 24. तब, शुरुआत साथ जी, संख्या का शब्द 2! = 12 जैसा बाद रखने जी

पर चरम बाएँ स्थिति, हम बचे हैं साथ पत्र ए, ए, मैं और एन। इसी प्रकार, वहाँ हैं 12 शब्द शुरुआत साथ अगला पत्र मैं। कुल संख्या का शब्द इसलिए दूर प्राप्त किया

= 24 + 12 + 12 =48.

49 वां शब्द है नागी. 50 वाँ शब्द है NAAIG.

उदाहरण 23 कैसे अनेक नंबर ग्रेटर बजाय 1000000 कर सकना होना बनाया द्वारा का उपयोग करते हुए अंक 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4?

समाधान तब से, 1000000 है ए 7 अंकों संख्या और संख्या का अंक को होना इस्तेमाल किया गया है भी

1. इसलिए, नंबर को होना गिना हुआ इच्छा होना 7 अंकों केवल। भी, नंबर पास होना को होना ग्रेटर बजाय 1000000, इसलिए वे कर सकना शुरू दोनों में से एक साथ 1, 2 या 4.

6!

संख्या का नंबर शुरुआत साथ 1 =

= 4 × 5 × 6

= 60, जैसा कब 1 है

3! 2! 2

तय पर चरम बाएं पद, शेष अंक को होना पुन: व्यवस्थित इच्छा होना 0, 2, 2, 2, 4, 4, में कौन वहाँ हैं 3, 2 *एस* और 2, 4 *एस* .

कुल नंबर शुरुआत साथ 2

= 6! = 3 × 4 × 5 × 6 = 180

2! 2! 2

और कुल नंबर शुरुआत साथ 4 6! = 4 × 5 × 6 = 120

3!

122 गणित

इसलिए, आवश्यक संख्या का नंबर = 60 + 180 + 120 = 360.

विकल्प तरीका

7!

संख्या का 7 अंकों व्यवस्था, स्पष्ट रूप से, 3! 2!

= 420 . लेकिन, यह इच्छा शामिल करना वे

नंबर भी, कौन पास होना 0 पर चरम बाएं पद। संख्या का ऐसा

6!

व्यवस्था 3! 2! (द्वारा फिक्सिंग 0 पर चरम बाएं पद) = 60.

इसलिए आवश्यक संख्या संख्याओं का = 420 – 60= 360.

�Note If one or more than one digits given in the list is repeated, it will be

understood that in any number, the digits can be used as many times as is given in the list, e.g., in the above example 1 and 0 can be used only once whereas 2 and 4 can be used 3 times and 2 times, respectively.

उदाहरण 24 में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना 5 लड़कियाँ और 3 लड़के होना आसीन में ए पंक्ति इसलिए वह नहीं दो लड़के हैं एक साथ?

समाधान होने देना हम पहला सीट 5 लड़कियाँ। यह कर सकना होना हो गया में 5! तौर तरीकों। के लिए प्रत्येक ऐसा व्यवस्था, तीन लड़के कर सकना होना आसीन केवल पर पार करना चिह्नित स्थानों।

× जी × जी × जी × जी × जी ×.

वहाँ हैं 6 पार करना चिह्नित स्थानों और तीन लड़के कर सकना होना आसीन में 6 पी इस तरह, द्वारा गुणा सिद्धांत, कुल संख्या का तौर तरीकों

3

तौर तरीकों।

= 5! × 6 पी

= 5! × 6!

3!

3

=4 × 5 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 = 14400.

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 6

1. कैसे अनेक शब्द, साथ या बिना अर्थ, प्रत्येक का 2 स्वर और 3 व्यंजन कर सकना होना बनाया से पत्र का शब्द बेटी ?
2. कैसे अनेक शब्द, साथ या बिना अर्थ, कर सकना होना बनाया का उपयोग करते हुए सभी पत्र का शब्द समीकरण पर ए समय इसलिए वह स्वर और व्यंजन घटित होना एक साथ?
3. ए समिति का 7 है को होना से बना हुआ 9 लड़के और 4 लड़कियाँ। में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना यह होना हो गया कब समिति बना होना का:
   1. बिल्कुल 3 लड़कियाँ ? (ii) कम से कम 3 लड़कियाँ ? (iii) अधिक से अधिक 3 लड़कियाँ ?
4. अगर अलग क्रमपरिवर्तन का सभी पत्र का शब्द इंतिहान हैं

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 123

एक शब्दकोश के रूप में सूचीबद्ध, इस सूची में पहले से पहले कितने शब्द हैं शब्द शुरुआत साथ इ ?

1. अंक 0, 1, 3, 5, 7 और 9 से कितनी 6 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं कौन हैं भाज्य द्वारा 10 और नहीं अंक है दोहराया गया ?
2. अंग्रेजी वर्णमाला में 5 स्वर और 21 व्यंजन हैं। कितने शब्दों के साथ से दो अलग-अलग स्वर और 2 अलग-अलग व्यंजन बनाए जा सकते हैं वर्णमाला ?
3. एक परीक्षा में, एक प्रश्न पत्र में 12 प्रश्न होते हैं जो दो भागों में विभाजित होते हैं पार्ट्स अर्थात, भाग मैं और भाग द्वितीय, युक्त 5 और 7 प्रशन, क्रमश। ए विद्यार्थी प्रत्येक भाग से कम से कम 3 का चयन करते हुए, कुल 8 प्रश्नों का उत्तर देना आवश्यक है। में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना ए विद्यार्थी चुनना प्रशन ?
4. ठानना संख्या का 5-कार्ड युग्म बाहर का ए जहाज़ की छत का 52 पत्ते अगर प्रत्येक चयन का 5 कार्ड बिल्कुल एक है राजा।
5. यह है आवश्यक को सीट 5 पुरुषों और 4 औरत में ए पंक्ति इसलिए वह औरत पर कब्जा यहां तक की स्थानों। कैसे अनेक ऐसा व्यवस्था हैं संभव ?
6. 25 छात्रों की एक कक्षा में से 10 को एक भ्रमण पार्टी के लिए चुना जाना है। वहाँ 3 छात्र हैं जो निर्णय लेते हैं कि या तो वे सभी शामिल होंगे या उनमें से कोई भी शामिल नहीं होगा जोड़ना। में कैसे अनेक तौर तरीकों कर सकना भ्रमण दल होना चुना ?
7. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों को कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है? इसलिए वह सभी एस.एस हैं एक साथ ?

*Summary*

�*Fundamental principle of counting* If an event can occur in *m* different ways, following which another event can occur in *n* different ways, then the total number of occurrence of the events in the given order is *m* × *n*.

�The number of permutations of *n* different things taken *r* at a time, where

*n*!

repetition is not allowed, is denoted by *n*P and is given by *n*P =

*r*

*r*

( − *r*)!

,

where 0 ≤ *r* ≤ *n*.

�*n*! = 1 × 2 × 3 × ...×*n*

�*n*! = *n* × (*n* – 1) !

�The number of permutations of *n* different things, taken *r* at a time, where repeatition is allowed, is *nr*.

�The number of permutations of *n* objects taken all at a time, where *p*1 objects

124 गणित

are of first kind, *p*2 objects are of the second kind, ..., *pk* objects are of the *k*

th

*n*!

kind and rest, if any, are all different is *p*1! *p*2 !*... pk*! .

�The number of combinations of *n* different things taken *r* at a time, denoted by

*n*!

*n*C , is given by *n*C *=* =

*r*

*r*

!*( n* − *r )*!

*,* 0 ≤ *r* ≤ *n*.

*ऐतिहासिक टिप्पणी*

अवधारणाओं का क्रमपरिवर्तन और युग्म कर सकना होना पता लगाया पीछे को आगमन भारत में जैन धर्म का और शायद पहले भी। हालाँकि, इसका श्रेय को जाता है जैन जिन्होंने इसके विषय को गणित में एक स्व-निहित विषय के रूप में माना, अंतर्गत नाम *विकल्प* .

जैनियों में, *महावीर* , (लगभग 850) शायद दुनिया के पहले हैं गणितज्ञ आकलित साथ उपलब्ध कराने के सामान्य सूत्रों के लिए क्रमपरिवर्तन और संयोजन.

में 6 शतक ई.पू., *सुश्रुत,* में उसका औषधीय काम, *सुश्रुत संहिता* , इस बात पर ज़ोर वह 63 युग्म कर सकना होना बनाया बाहर का 6 अलग स्वाद, लिया एक पर ए समय, एक समय में दो, आदि। तीसरी शताब्दी ईसा पूर्व के आसपास एक संस्कृत विद्वान *पिंगला ,* देता है तरीका का निर्धारण संख्या का युग्म का ए दिया गया संख्या उनके काम *छंद सूत्र* में, एक समय में एक, एक समय में दो, आदि लिए गए पत्र । *भास्कराचार्य* (जन्म 1114) ने क्रमपरिवर्तन के विषय पर विचार किया और युग्म अंतर्गत नाम *अंका पाशा* में उसका प्रसिद्ध काम *लीलावती.* में जोड़ना

को सामान्य सूत्रों के लिए *एन* सी और *एन* पी पहले से प्रदान किया द्वारा *महावीर,*

*r*

*r*

*भास्कराचार्य* इससे संबंधित कई महत्वपूर्ण प्रमेय और परिणाम देते हैं विषय।

बाहर भारत, विषय मामला का क्रमपरिवर्तन और युग्म था इसका विनम्र शुरुआत में चीन में प्रसिद्ध किताब मैं- राजा (किताब का परिवर्तन)। यह है कठिन को देना अनुमानित समय का यह काम, तब से में 213 ई.पू., सम्राट था आदेश दिया सभी पुस्तकें और पांडुलिपियों में देश को होना जला कौन सौभाग्य से पूर्णतः क्रियान्वित नहीं किया गया। यूनानियों और बाद के लैटिन लेखकों ने भी कुछ किया बिखरा हुआ काम पर लिखित का क्रमपरिवर्तन और संयोजन.

कुछ अरबी और हिब्रू लेखकों ने क्रमपरिवर्तन और की अवधारणाओं का उपयोग किया खगोल विज्ञान के अध्ययन में संयोजन। उदाहरण के लिए, *रब्बी बेन एज्रा ने दृढ़ निश्चय किया* संख्या का युग्म का ज्ञात ग्रहों लिया दो पर ए समय, तीन पर ए समय और इसलिए पर। यह था आस-पास 1140. यह प्रकट होता है वह *रबी बेन एजरा* किया नहीं जानना

क्रमपरिवर्तन और संयोजन 125

the formula for *n*C . However, he was aware that *n*C = *n*C for specific values

*r*

*r* *n*–*r*

*n* and *r*. In 1321, *Levi Ben Gerson*, another Hebrew writer came up with the

formulae for *n*P *, n*P *and the general formula for n*C *.*

*r* *n*

*r*

The first book which gives a complete treatment of the subject matter of

permutations and combinations is Ars Conjectandi written by a Swiss, *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705), posthumously published in 1713. This book contains essentially the theory of permutations and combinations as is known today.

— **�** —

## अध्याय 7

126 MATHEMATICS

BINOMIAL THEOREM

गणित *है ए अधिकांश एकदम सही विज्ञान और इसका निष्कर्ष हैं काबिल का निरपेक्ष सबूत* – *सीपी स्टाइनमेट्ज़*

#### परिचय

पिछली कक्षाओं में, हमने सीखा है कि वर्ग कैसे ज्ञात करें और क्यूब्स का द्विपद पसंद *ए* + *बी* और *ए* – *बी* । का उपयोग करते हुए उन्हें, हम सकना मूल्यांकन करना न्यूमेरिकल मान का नंबर पसंद (98) 2 = (100 – 2) 2 , (999) 3 = (1000 – 1) 3 , वगैरह। तथापि, के लिए

उच्च पॉवर्स पसंद (98) 5 , (101) 6 , वगैरह।, गणना बनना कठिन द्वारा का उपयोग करते हुए दोहराया गया गुणन. यह कठिनाई था पर काबू पाने द्वारा ए प्रमेय ज्ञात जैसा द्विपद प्रमेय. यह देता है ( *a* + *b* ) *n का* विस्तार करने का एक आसान तरीका , जहां *n* एक पूर्णांक या a है तर्कसंगत संख्या। में यह अध्याय, हम अध्ययन द्विपद प्रमेय के लिए सकारात्मक अभिन्न सूचकांक केवल।

#### द्विपद प्रमेय के लिए सकारात्मक अभिन्न सूचकांकों

होने देना हम पास होना ए देखना पर अगले पहचान हो गया पहले: ( *ए+ बी* ) 0 = 1 *ए* + *बी* ≠ 0

( *ए+ ख* ) 1 = *ए* + *बी*

( *ए+ ख* ) 2 = *एक* 2 + 2 *अब* + *बी* 2

( *ए+ ख* ) 3 = *a3* \_ + 3 *ए* 2 *बी* + 3 *अब* 2 + *बी* 3

( *ए+ बी* 4 \_ = ( *ए* + *ख* ) 3 ( *ए* + *बी* ) = *एक* 4 + 4 *ए* 3 *बी* + 6 *ए* 2 *बी* 2 + 4 *अब* 3 + *बी* 4

में इन विस्तार, हम निरीक्षण वह

ब्लेज पास्कल (1623-1662)

* + 1. विस्तार में पदों की कुल संख्या सूचकांक से एक अधिक है। के लिए उदाहरण, में विस्तार का ( *ए + ख* ) 2 , संख्या का शर्तें है 3 जबकि अनुक्रमणिका का ( *ए* + *ख* ) 2 है 2.
    2. पॉवर्स का पहला मात्रा ' *ए* ' जाना पर घटते द्वारा 1 जबकि पॉवर्स का दूसरा मात्रा ' *बी* ' का इजाफ़ा 1, में क्रमिक शर्तें।
    3. में प्रत्येक अवधि का विस्तार, जोड़ का सूचकांक का *ए* और *बी* है वही और के सूचकांक के बराबर है *ए* + *बी* ।

द्विपद प्रमेय 127

हम अब व्यवस्थित करना गुणांकों में इन विस्तार जैसा इस प्रकार (अंजीर 7.1):



अंजीर 7.1

करना हम निरीक्षण कोई नमूना में यह मेज़ वह इच्छा मदद हम को लिखना अगला पंक्ति? हाँ हम करना। यह कर सकना होना देखा वह जोड़ना का 1 का में पंक्ति के लिए अनुक्रमणिका 1 देता है उठना को 2 में पंक्ति के लिए अनुक्रमणिका 2. जोड़ना का 1, 2 और 2, 1 में पंक्ति के लिए अनुक्रमणिका 2, देता है उठना को 3 और 3 में पंक्ति के लिए अनुक्रमणिका 3 और इसलिए पर। भी, 1 है उपस्थित पर शुरुआत और पर अंत का प्रत्येक पंक्ति। यह कर सकना होना जारी तक कोई अनुक्रमणिका का हमारा दिलचस्पी।

हम कर सकना विस्तार पैटर्न दिया गया में अंजीर 7.2 द्वारा लिखना ए कुछ अधिक पंक्तियाँ





#### पास्कल का त्रिकोण



अंजीर 7.2

संरचना दिया गया में अंजीर 7.2 दिखता है पसंद ए त्रिकोण साथ 1 पर शीर्ष शिखर और दौड़ना दो तिरछी तरफ नीचे। संख्याओं की इस सारणी को *पास्कल त्रिकोण के रूप में जाना जाता है* , फ्रांसीसी गणितज्ञ ब्लेज़ पास्कल के नाम पर। इसे *मेरु के नाम से भी जाना जाता है प्रस्तारा* द्वारा पिंगला.

विस्तार के लिए उच्च पॉवर्स का ए द्विपद हैं भी संभव द्वारा का उपयोग करते हुए पास्कल का त्रिकोण. होने देना हम बढ़ाना (2 *एक्स* + 3 *य* ) 5 द्वारा का उपयोग करते हुए पास्कल का त्रिकोण. पंक्ति के लिए अनुक्रमणिका 5 है

1 5 10 10 5 1

का उपयोग करते हुए यह पंक्ति और हमारा टिप्पणियों (मैं), (ii) और (iii), हम पाना

(2 *एक्स* + 3 *य* ) 5 = (2 *एक्स* ) 5 + 5(2 *x* ) 4 (3 *वर्ष* ) + 10(2 *x* ) 3 (3 *य* ) 2 +10 (2 *एक्स* ) 2 (3 *य* ) 3 + 5(2 *x* )(3 *y* ) 4 +(3 *वर्ष* ) 5

= 32 *x* 5 + 240 *x* 4 वर्ष + 720 *x* 3 y 2 + 1080 *x* 2 *y* 3 + 810 *xy* 4 + 243 *य* 5 .

128 गणित

अब, अगर हम चाहना को खोजो विस्तार का (2 *एक्स* + 3 *य* ) 12 , हम हैं पहला आवश्यक को पाना पंक्ति के लिए अनुक्रमणिका 12. यह कर सकना होना हो गया द्वारा लिखना सभी पंक्तियों का पास्कल का त्रिकोण तक अनुक्रमणिका 12. यह है ए थोड़ा लंबा प्रक्रिया। प्रक्रिया, जैसा आप निरीक्षण, इच्छा बनना अधिक कठिन, अगर हम ज़रूरत विस्तार को शामिल फिर भी बड़ा शक्तियां.

हम इस प्रकार कोशिश को खोजो ए नियम वह इच्छा मदद हम को खोजो विस्तार का द्विपद के लिए पास्कल के त्रिकोण की सभी पंक्तियों को लिखे बिना कोई भी शक्ति, जो इससे पहले आती है पंक्ति का इच्छित अनुक्रमणिका।

के लिए यह, हम बनाना उपयोग का अवधारणा का युग्म अध्ययन पहले को पुनर्लेखन

नंबर में पास्कल का त्रिकोण. हम जानना वह

C

*एन आर* =

*एन* !

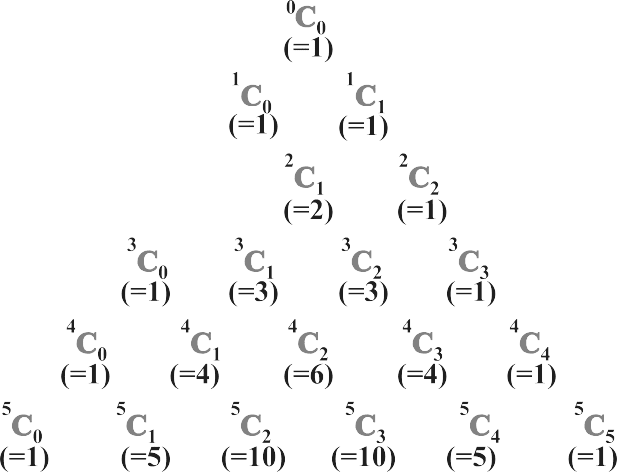
!( *एन – आर* )! , 0 ≤ *आर* ≤ *एन* और

*एन* है ए गैर नकारात्मक पूर्णांक. भी, *एन* सी = 1 = *एन* सी

0

*n*

 पास्कल का त्रिकोण कर सकना अब होना फिर से लिखा जैसा (अंजीर 7.3)



अंजीर 7.3 पास्कल का त्रिकोण

अवलोकन यह नमूना, हम कर सकना अब लिखना पंक्ति का पास्कल का त्रिकोण के लिए कोई अनुक्रमणिका बिना लिखना पहले पंक्तियाँ के लिए उदाहरण, के लिए अनुक्रमणिका 7 पंक्ति चाहेंगे होना

7सी0 \_ \_ 7सी1 \_ \_ 7सी2 \_ \_ 7सी3 \_ \_ 7सी4 \_ \_ 7सी5 \_ \_ 7सी6 \_ \_ 7सी7 . \_

इस प्रकार, का उपयोग करते हुए यह पंक्ति और टिप्पणियों (मैं), (ii) और (iii), हम पास होना

( *ए* + *ख* ) 7 = 7सी0 \_ \_ *a7* \_ + 7सी 1 *ए* 6 *बी* + 7 सी 2 *ए* 5 *बी* 2 + 7 सी 3 *ए* 4 *बी* 3 + 7सी 4 *ए* 3 *बी* 4 + 7 सी 5 *ए* 2 *बी* 5 + 7 सी 6 *एबी* 6 + 7 सी 7 *बी* 7

एक विस्तार का ए द्विपद को कोई सकारात्मक अभिन्न अनुक्रमणिका कहना *एन* कर सकना अब होना कल्पना का उपयोग करते हुए इन अवलोकन. हम हैं अब में ए पद को लिखना विस्तार का ए द्विपद को कोई सकारात्मक अभिन्न अनुक्रमणिका।

द्विपद प्रमेय 129

* + 1. *द्विपद प्रमेय के लिए कोई सकारात्मक पूर्णांक एन* ,

( *ए* + *बी* ) *एन* = *एन* सी *ए एन* + *n* C *a n* –1 *b* + *n* C *a n* – *2 b* 2 + ...+ *n* C *ए* । *बी एन* -1 + *एन* सी *बी एन* सबूत सबूत है प्राप्त किया द्वारा आवेदन सिद्धांत का गणितीय प्रेरण। होने देना दिया गया कथन होना

0 1 2 *n* – 1 *n*

पी( *एन* ) : ( *ए* + *बी* ) *एन* = *एन* सी *एक \_* + *एन* सी *ए एन* – 1 *बी* + *एन* सी *एक \_* – 2 *बी* 2 + ...+ *एन* सी *ए* । *बी एन* – 1 + *एन* सी *बी एन*

0 1 2

के लिए *एन* = 1, हम पास होना

*एन* -1 *एन*

पी (1) : ( *ए* + *ख* ) 1 = 1 सी *एक* 1 + 1 सी *बी* 1 = *ए* + *बी*

0 1

इस प्रकार, पी (1) क्या सच है।

कल्पना करना पी ( *के* ) है सत्य के लिए कुछ सकारात्मक पूर्णांक *k* , अर्थात्

( *ए* + *बी* ) *के* = *के* सी *एक क* + *के* सी *एक क* – 1 *बी* + *के* सी *एक क* – 2 *बी* 2 + ...+ *के* सी *बीके* . *\_* . .

(1)

0 1 2 *के*

हम करेंगे सिद्ध करना वह पी( *क* + 1) यह भी सच है, यानी,

( *ए* + *बी* ) *के* + 1 = *को* + 1 सी *और के* + 1 + *को* + 1 सी *और बी \_* + *को* + 1 सी *और के* – 1 *बी* 2 + ...+ *को* + 1 सी *बी के* + 1

0 1 2 *k*+1

अब, ( *ए* + *बी* ) *के* + 1 = ( *ए* + *बी* ) ( *ए* + *बी* ) *के*

1

*k* – 1

2

= ( *ए* + *बी* ) ( *के* सी

0

*एक क* + *के* सी *एक क* – 1 *बी* + *के* सी

*एक क* – 2 *बी* 2 +...+ *के* सी

*अब के* – 1 + *के* सी *बी के* )

[से (1)]

*k*

= *केसी* \_ *एके \_* + 1 + *केसी* \_ *ए के बी* + *के* सी *ए के* - 1 *बी* 2 +...+ *के* सी *ए* 2 *बी के* - 1 + *केसी* \_ *अब के* + *केसी* \_ *ए के बी*

0 1 2 *के* – 1 *क*  0

+ *के* सी *एक क* – 1 *बी* 2 + *के* सी *एक क* – 2 *बी* 3 +...+ *के* सी

*अब के* + *के* सी *बी के* + 1

1 2 *के* -1

*क*

[वास्तविक गुणन द्वारा]

= *क* सी 0 *ए क* + 1 + ( *के* सी 1+ \_ *क* सी 0 ) *ए के बी* + ( *के* सी 2 + *क* सी 1 ) *एक क* – 1 *बी* 2 + ...

+ ( *क* सी *क* + *क* सी *क* –1 ) *अब के* + *के* सी *के बी के* + 1  [समूहीकरण पसंद शर्तें]

= *क* + 1 सी 0 *ए क* + 1 + *क* + 1 सी 1 *ए के बी* + *क* + 1 सी 2 *ए के* - 1 बी 2 +...+ *के* + 1 सी *के अब के* + *क* + 1 सी *के* +1 *बी के* +1

(द्वारा का उपयोग करते हुए *क* + 1 सी 0 =1, *के* सी *आर* + *के* सी *आर* -1 = *क* + 1 सी *आर*  और *क* सी *क* = 1= *क* + 1 सी *के* + 1 )

इस प्रकार, यह है गया साबित वह पी ( *क* + 1) है सत्य जब कभी भी पी( *के* ) है सत्य। इसलिए, द्वारा सिद्धांत का गणितीय प्रेरण, पी( *एन* ) है सत्य के लिए प्रत्येक सकारात्मक पूर्णांक *एन* ।

हम उदाहरण देकर स्पष्ट करना यह प्रमेय द्वारा का विस्तार ( *एक्स* + 2) 6 :

( *एक्स* + 2) 6 = 6 सी 0 *एक्स* 6 + 6 सी 1 *x* 5 .2 + 6 सी 2 *x* 4 2 2 + 6 सी 3 *एक्स* 3 .2 3 + 6 सी 4 *x* 2 .2 4 + 6 सी 5 *एक्स* .2 5 + 6 सी 6 .2 6 .

= *एक्स* 6 + 12 *x* 5 + 60 *x* 4 + 160 *x* 3 + 240 *x* 2 + 192 *एक्स* + 64 इस प्रकार ( *एक्स* + 2) 6 = *एक्स* 6 + 12 *x* 5 + 60 *x* 4 + 160 *x* 3 + 240 *x* 2 + 192 *एक्स* + 64.

130 गणित

टिप्पणियों

*n*

1. अंकन ∑ *एन* सी

*क* = 0

*k*

*ए एन* - *के बी के* खड़ा के लिए

*एन* सी *ए एन बी* 0 + *एन* सी *ए एन* -1 *बी* 1 + ...+ *एन* सी *ए एन–आर बी आर* + ...+ *एन* सी *ए एन–एन बी एन* , कहाँ *बी* 0 = 1 = *ए एन–एन* .

0 1 आर *एन*

इस तरह प्रमेय कर सकना भी होना कहा गया जैसा

*n*

( *ए* + *बी* ) *एन* = ∑ *एन* सी

*क* = 0

*k*

*एक \_* − *के बी के* .

1. गुणांकों *एन* सी घटित में द्विपद प्रमेय हैं ज्ञात जैसा द्विपद

*r*

गुणांक.

1. वहाँ हैं ( *एन* +1) शर्तें में विस्तार का ( *ए* + *बी* ) *एन* , अर्थात, एक अधिक बजाय अनुक्रमणिका।
2. विस्तार के क्रमिक पदों में *a का सूचकांक* घटता जाता है एकता. यह है *एन* में पहला अवधि, ( *एन* -1) में दूसरा अवधि, और इसलिए पर समापन साथ शून्य में अंतिम अवधि। पर वही समय अनुक्रमणिका का *बी* बढ़ती है द्वारा एकता, शुरुआत साथ शून्य में पहला अवधि, 1 में दूसरा और इसलिए पर समापन साथ *एन* में अंतिम अवधि।
3. *a* + *b* ) *n* के विस्तार में , *a* और *b* के सूचकांकों का योग *n* + 0 = *n* है पहला अवधि, ( *एन* – 1) + 1 = *एन* में दूसरा अवधि और इसलिए पर 0 + *एन* = *एन* में अंतिम अवधि। इस प्रकार, यह कर सकना होना देखा वह जोड़ का सूचकांक का *ए* और *बी* है *एन* में प्रत्येक अवधि का विस्तार।
   * 1. *कुछ विशेष मामलों* में विस्तार का ( *ए* + *बी* ) *एन* ,
4. लेना *\_* = *x* और *b* = - *y* , हम प्राप्त करते हैं ( *एक्स* – *Y n =* [ *एक्स* + ( *- Y* n

= *एन* सी 0 *एक्स एन* + *एन* सी 1 *एक्स एन* – 1 ( - *)* + *n* C 2 *x n* –2 (– *y* ) 2 + *n* C 3 *x n* –3 (– *y* ) 3 + ... + *एन* सी *एन* ( *- तब* \_

= *एन* सी 0 *एक्स एन* – *एन* सी 1 *एक्स एन* – 1 *वर्ष* + *एन* सी 2 *एक्स एन* – 2 *में से* 2 – *एन* सी 3 *एक्स एन* – 3 *में से* 3 + ... + (-1) *एन एन* सी *एन तब \_*

लोहबान ( *एक्स* – *वाई* ) *एन* = *एन* सी 0 *एक्स एन* – *एन* सी 1 *एक्स एन* – 1 + *एन* सी 2 *एक्स एन* – 2 *2* \_ + ... + (-1) *एन एन* सी *एन तब \_*

का उपयोग करते हुए यह, हम है ( *x* –2 *y* ) 5 = 5C0 *x* 5 \_ \_ - 5 सी 1 *एक्स* 4 ( *2 वर्ष* ) + 5 सी 2 *एक्स* 3 ( *2य* ) 2 - 5 सी 3 *एक्स* 2 ( *2य* ) 3 +

5सी4 \_ \_ *x* ( *2y* ) 4 - 5 सी 5 (2 *वाई* ) 5

= *एक्स* 5 -10 *x* 4 वर्ष + 40 *x* 3 *y* 2 - 80 *x* 2 *y* 3 + 80 *xy4* \_ - 32 *य* 5 .

1. ले रहा *ए* = 1, *बी* = *एक्स* , हम प्राप्त

(1 + *एक्स* ) *एन* = *एन* सी 0 (1) *एन* + *एन* सी 1 (1) *एन* – 1 *एक्स* + *एन* सी 2 (1) *एन* – 2 *x2* \_ + ... + *एन* सी *एन एक्स एन*

= *एन* सी 0 + *एन* सी 1 *एक्स* + *एन* सी 2 *एक्स* 2 + *एन* सी 3 *एक्स* 3 + ... + *एन* सी *एन एक्स एन*

इस प्रकार (1 + *एक्स* ) *एन* = *एन* सी 0 + *एन* सी 1 *एक्स* + *एन* सी 2 *एक्स* 2 + *एन* सी 3 *एक्स* 3 + ... + *एन* सी *एन एक्स एन*

द्विपद प्रमेय 131

में विशिष्ट, के लिए *एक्स* = 1, हम पास होना

2 *एन* = *एन* सी + *एन* सी + *एन* सी + ... + *एन* सी *.*

0 1 2 *n*

1. लेना *\_* = 1, *बी* =- *एक्स,* हमने प्राप्त

(1- *एक्स* ) *एन*  = *एन* सी – *एन* सी *एक्स* + *एन* सी *एक्स* 2 – ... + (- 1) *एन एन* सी *एक्स एन*

0 1 2 *n*

में विशिष्ट, के लिए *एक्स* = 1, हम पाना

0 = *एन* सी – *एन* सी + *एन* सी – ... + (-1) *एन एन* सी

0 1 2 *n*

उदाहरण 1 बढ़ाना  *एक्स* 2 +



3 4 \_



, *एक्स* ≠ 0

 

समाधान द्वारा का उपयोग करते हुए द्विपद प्रमेय, हम पास होना

3 4  \_ 3 

####  3 2 \_

 3 3 \_

####  3 4 \_

*एक्स* 2 + = 4 सी ( *x* 2 ) 4 + 4सी \_ ( *x2* ) 3 \_   + 4सी \_ ( *x2* ) 2 \_ 

 + 4 सी ( *x2* ) \_   + 4 सी  

0 1  *एक्स* 

#### 3 9

2 \_ *एक्स* 3  \_ *एक्स* 

#### 27 81

4  *एक्स* 

= *x* 8 + 4. *x* 6 .

+ 6. *x* 4 . 2 + 4. *x* 2 . 3 +4 \_

= *x* 8 + 12 *x* 5 + 54 *x* 2 +

###### 108 + 81 .

उदाहरण 2 गणना करना (98) 5 .

4

समाधान हम अभिव्यक्त करना 98 जैसा जोड़ या अंतर का दो नंबर किसका पॉवर्स हैं आसान को गणना करो, और तब उपयोग द्विपद प्रमेय.

लिखना 98 = 100 – 2

इसलिए, (98) 5 = (100 – 2) 5

= 5सी0 \_ \_ (100) 5 - 5सी1 \_ \_ (100) 4 .2 + 5सी2 \_ \_ (100) 3 2 2

- 5सी3 \_ \_ (100) 2 (2) 3 + 5सी4 \_ \_ (100) (2) 4 - 5सी5 \_ \_ (2) 5

= 10000000000 – 5 × 100000000 × 2 + 10 × 1000000 × 4 – 10 ×10000

× 8 + 5 × 100 × 16 – 32

= 10040008000 – 1000800032 = 9039207968.

उदाहरण 3 कौन है बड़ा (1.01) 1000000 या 10,000?

समाधान विभाजन 1.01 और का उपयोग करते हुए द्विपद प्रमेय को लिखना पहला कुछ शर्तें हम पास होना

132 गणित

(1.01) 1000000 = (1 + 0.01) 1000000

= 1000000 सी + 1000000 सी (0.01) + अन्य सकारात्मक शर्तें

0 1

= 1 + 1000000 × 0.01 + अन्य सकारात्मक शर्तें

= 1 + 10000 + अन्य सकारात्मक शर्तें

> 10000

अत : (1.01) 1000000 > 10000

उदाहरण 4 का उपयोग करते हुए द्विपद प्रमेय, सिद्ध करना वह 6 *एन* -5 *एन* हमेशा पत्तियों शेष 1 कब अलग करना द्वारा 25.

समाधान के लिए दो नंबर *ए* और *बी* अगर हम कर सकना खोजो नंबर *क्यू* और *आर* ऐसा वह *ए* = *bq* + *आर* , तब हम कहना वह *बी* विभाजित *ए* साथ *क्यू* जैसा भागफल और *आर* जैसा शेष. इस प्रकार, में आदेश को दिखाओ वह 6 *एन* – 5 *एन* पत्तियों शेष 1 कब अलग करना द्वारा 25, हम सिद्ध करना वह 6 *एन* – 5 *एन* = 25 *कि* + 1, कहाँ *क* है कुछ प्राकृतिक संख्या।

हम पास होना

(1 + *एक* \_ *\_* = *एन* सी + *एन* सी *ए* + *एन* सी *एक* 2 + ... + *एन* सी *एक \_*

0 1 2 *n*

के लिए *ए*  = 5, हम पाना

(1 + 5) *एन* = *एन* सी + *एन* सी 5 + *एन* सी 5 2 + ... + *एन* सी 5 *एन* यानी (6) *एन* = 1 + 5 *एन* + 5 2 . *एन* सी + 5 3 . *एन* सी + ... + 5 *एन* यानी 6 *एन* – 5 *एन* = 1+5 2 ( *एन* सी + *एन* सी 5 + ... + 5 *एन* -2 )

2 3

2 3

0 1 2 *n*

या 6 *एन* – 5 *एन* = 1+ 25 ( *एन* सी + 5 . *एन* सी + ... + 5 *एन* -2 )

2 3

या 6 *एन* – 5 *एन* = 25 *k* +1 जहां *क* = *एन* सी + 5 . *एन* सी + ... + 5 *एन* -2 . यह दिखाता है वह कब अलग करना द्वारा 25, 6 *एन* – 5 *एन* पत्तियों शेष 1.

2 3

EXERCISE 7.1

बढ़ाना प्रत्येक का अभिव्यक्ति में अभ्यास 1 को 5.

 2  5

1. (1-2 *x* ) 5 2.

 *–*  

 

*x* 2

3. (2 *एक्स* – 3) 6

 *एक्स*  1 5 \_

#### 1 \_ 6 \_

द्विपद प्रमेय 133

4.  3 + 

5.  *एक्स* + 

*एक्स*

  

का उपयोग करते हुए द्विपद प्रमेय, मूल्यांकन करना प्रत्येक का अगले:

6. (96) 3 7. (102) 5 8. (101) 4

9. (99) 5

1. का उपयोग करते हुए द्विपद प्रमेय, संकेत देना कौन संख्या है बड़ा (1.1) 10000 या 1000.
2. खोजो ( *ए* + *बी* 4 \_ – ( *ए* – *बी* 4 । \_ इस तरह, मूल्यांकन करना

#### ( + 2 ) 4- (

3

3

– 2) 4 .

1. खोजो ( *एक्स* + 1) 6 + ( *एक्स* – 1) 6 . इस तरह या अन्यथा मूल्यांकन करना ( 2+ \_ 1) 6 + (

2

– 1) 6 .

1. दिखाओ वह 9 *एन* +1 – 8 *एन* – 9 है भाज्य द्वारा 64, जब कभी भी *एन* है ए सकारात्मक पूर्णांक.

*n*

1. सिद्ध करना वह ∑ 3 *आर* *एन* सी *आर* = 4 *एन* .

*आर* = 0

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 7

1. अगर *ए* और *बी* हैं विशिष्ट पूर्णांक, सिद्ध करना वह *ए* – *बी* है ए कारक का *एक \_* – *बी एन* , जब कभी भी

*एन* है ए सकारात्मक पूर्णांक.

[ संकेत देना लिखना *एक \_* = ( *ए* – *बी* + *बी* ) *एन* और बढ़ाना]

1. मूल्यांकन करना (



3

+ 2 ) 6 − (

– 2 ) 6 .

1. खोजो \_ कीमत का ( *ए* 2 +



3

*a2* \_ − 1 ) 4 + ( *a2* \_ −

*a2* \_ − 1 ) 4 .

1. खोजो एक सन्निकटन का (0.99) 5 का उपयोग करते हुए पहला तीन शर्तें का इसका विस्तार।

 *x*  2 4 \_

1. बढ़ाना \_ \_ तुम हो \_ बि एन ओम आई अल वे या तो \_ \_ 1 \_ + − 

2 *x*

 

*, एक्स* ≠ 0 .

1. खोजो विस्तार का (3 *x* 2 – 2 *कुल्हाड़ी* + 3 *ए* 2 ) 3 का उपयोग करते हुए द्विपद प्रमेय.

*Summary*

�The expansion of a binomial for any positive integral *n* is given by Binomial

Theorem, which is (*a* + *b*)*n* = *n*C *an* + *n*C *an* – 1*b* + *n*C *an* – 2*b*2 + ...+

0

1

2

*n*C

*n* – 1

*a*.*bn* – 1 + *n*C *bn.*

*n*

�The coefficients of the expansions are arranged in an array. This array is called *Pascal’s triangle*.

134 गणित

*Historical Note*

The ancient Indian mathematicians knew about the coefficients in the expansions of (*x* + *y*)*n*, 0 ≤ *n* ≤ 7. The arrangement of these coefficients was in the form of a diagram called *Meru-Prastara*, provided by Pingla in his book *Chhanda shastra* (200B.C.). This triangular arrangement is also found in the work of Chinese mathematician Chu-shi-kie in 1303. The term binomial coefficients was first introduced by the German mathematician, Michael Stipel (1486-1567) in approximately 1544. Bombelli (1572) also gave the coefficients in the expansion of (*a* + *b*)*n*, for *n* = 1,2 ...,7 and Oughtred (1631) gave them for *n* = 1, 2,..., 10. The arithmetic triangle, popularly known as *Pascal’s triangle* and similar to the *Meru- Prastara* of Pingla was constructed by the French mathematician Blaise Pascal (1623-1662) in 1665.

The present form of the binomial theorem for integral values of *n* appeared in *Trate du triange arithmetic*, written by Pascal and published posthumously in 1665.

— **�** —

अध्याय 8

SEQUENCES AND SERIES

- प्राकृतिक *नंबर हैं उत्पाद का इंसान आत्मा। – डेडेकाइंड* �

#### परिचय

*अनुक्रम "* शब्द का प्रयोग बहुत अधिक मात्रा में किया जाता है वैसे ही जैसे सामान्य अंग्रेजी में होता है. जब हम कहते हैं कि ए संग्रह का वस्तुओं है सूचीबद्ध में ए अनुक्रम, हम आम तौर पर अर्थ संग्रह को इस तरह से व्यवस्थित किया गया है कि इसमें एक है पहचान की पहला सदस्य, दूसरा सदस्य, तीसरा सदस्य और इसलिए पर। के लिए उदाहरण, जनसंख्या का इंसान प्राणियों या जीवाणु अलग-अलग समय पर एक क्रम बनाते हैं। कुल राशि जमा किया में ए किनारा, ऊपर ए संख्या का साल रूप ए अनुक्रम। मूल्यह्रास मान का निश्चित माल घटित होना में ए अनुक्रम। दृश्यों पास होना महत्वपूर्ण अनुप्रयोग में अनेक क्षेत्रों का इंसान गतिविधियाँ।

फाइबोनैचि (1175-1250)

अनुक्रम, अगले विशिष्ट पैटर्न हैं बुलाया *प्रगति* . में पहले का कक्षा, हम पास होना अध्ययन के बारे में *अंकगणित प्रगति* (एपी). में यह अध्याय, अलावा अधिक चर्चा एपी के बारे में; *अंकगणित अर्थ, ज्यामितिक अर्थ, संबंध पूर्वाह्न के बीच और जीएम, क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के n पदों के योग के रूप में विशेष श्रृंखला, जोड़ को एन शर्तें का चौकों का प्राकृतिक नंबर और जोड़ को एन शर्तें का क्यूब्स का प्राकृतिक नंबर* इच्छा भी होना अध्ययन किया.

#### दृश्यों

होने देना हम विचार करना अगले उदाहरण:

मान लीजिए कि 30 वर्ष की पीढ़ी का अंतर है, तो हमें इसे खोजने के लिए कहा जाता है संख्या का पूर्वज, अर्थात, अभिभावक, दादा दादी, महान दादा दादी, वगैरह। वह ए व्यक्ति हो सकता है पास होना ऊपर 300 साल।

यहाँ, पीढ़ियों की कुल संख्या = 300 10

30

136 गणित

संख्या का व्यक्ति का पूर्वज के लिए पहला, दूसरा, तीसरा, ..., दसवां पीढ़ियों हैं 2, 4, 8, 16, 32, ..., 1024. इन नंबर रूप क्या हम पुकारना ए *अनुक्रम* ।

उन क्रमिक भागफलों पर विचार करें जो हमें 10 को 3 से विभाजित करने पर प्राप्त होते हैं अलग कदम का विभाजन। में यह प्रक्रिया हम पाना 3,3.3,3.33,3.333, ... और इसलिए पर। इन भागफल भी एक क्रम बनाते हैं। एक क्रम में आने वाली विभिन्न संख्याएँ हैं बुलाया इसका *शर्तें* । हम निरूपित शर्तें का ए अनुक्रम द्वारा *एक* 1 *, एक* 2 *, एक* 3 *, ..., एक* , *\_* ..., वगैरह।,

सबस्क्रिप्ट निरूपित पद का अवधि। *एन* वें अवधि है संख्या पर *एन* वें पद

का अनुक्रम और है लक्षित द्वारा *एक ।* \_

अनुक्रम।

*एन* वें अवधि है भी बुलाया *सामान्य अवधि* का

इस प्रकार, शर्तें का अनुक्रम का व्यक्ति का पूर्वज उल्लिखित ऊपर हैं:

*एक* 1 *=* 2 *, एक* 2 *=* 4 *, एक* 3 *=* 8 *, ..., एक* 10 = 1024.

इसी प्रकार, में उदाहरण का क्रमिक भागफल

*a1* \_ = 3, *a2* \_ = 3.3, *a3* \_ = 3.33, ..., *a6* \_ = 3.33333, वगैरह।

ए अनुक्रम युक्त परिमित संख्या का शर्तें है बुलाया ए *परिमित अनुक्रम* । के लिए

उदाहरण, अनुक्रम का पूर्वज है ए परिमित अनुक्रम तब से यह रोकना 10 शर्तें (ए तय संख्या)।

किसी अनुक्रम को *अनंत कहा जाता है* , यदि वह परिमित अनुक्रम नहीं है। उदाहरण के लिए, ऊपर उल्लिखित क्रमिक भागफलों का अनुक्रम एक *अनंत अनुक्रम है* , इसमें अनंत है समझ वह यह कभी नहीं समाप्त होता है.

अक्सर, यह है संभव को अभिव्यक्त करना नियम, कौन पैदावार विभिन्न शर्तें का ए अनुक्रम बीजीय सूत्र के संदर्भ में. उदाहरण के लिए, प्राकृतिक के अनुक्रम पर विचार करें नंबर 2, 4, 6, …

*1* लिंक करें = 2 = 2 एक्स 1 *और* 2 = 4 = 2 एक्स 2

*a3* \_ = 6 = 2 × 3a4 *\_* \_ = 8 = 2 × 4

.... .... .... .... .... ....

.... .... .... .... .... ....

*एक* 23 = 46= 2 × 23, *एक* 24 = 48 = 2 × 24, और इसलिए पर।

में तथ्य, हम देखना वह *एन* वें अवधि का यह अनुक्रम कर सकना होना लिखा हुआ जैसा *ए* = 2 *एन* ,

*n*

कहाँ *एन* है ए प्राकृतिक संख्या। इसी प्रकार, में अनुक्रम का विषम प्राकृतिक नंबर 1,3,5, ...,

एन *वें* \_ अवधि है दिया गया द्वारा सूत्र, *ए* = 2 *एन* - 1, कहाँ *एन* है ए प्राकृतिक संख्या।

*n*

में कुछ मामले, एक व्यवस्था का नंबर ऐसा जैसा 1, 1, 2, 3, 5, 8,.. है नहीं दृश्यमान पैटर्न, लेकिन अनुक्रम है आप जेनरेट हुई द्वारा पुनरावृत्ति रिश्ता दिया गया द्वारा

*a1* \_ = *a2* \_ = 1

*a3* \_ = *a1* \_ + *a2* \_

*एक \_* = *एक \_* – 2 + *एक \_* – 1 , *एन* > 2 यह अनुक्रम है बुलाया *फाइबोनैचि अनुक्रम* ।

दृश्यों और शृंखला 137

में अनुक्रम का अभाज्य 2,3,5,7,…, हम खोजो वह वहाँ है नहीं FORMULA के लिए *एन* वें

मुख्य। ऐसा अनुक्रम कर सकना केवल होना बताया गया है द्वारा मौखिक विवरण।

में प्रत्येक अनुक्रम, हम चाहिए नहीं अपेक्षा करना वह इसका शर्तें इच्छा अनिवार्य रूप से होना दिया गया द्वारा ए विशिष्ट सूत्र. तथापि, हम अपेक्षा करना ए सैद्धांतिक योजना या ए नियम के लिए उत्पादक शर्तें *एक* 1 , *एक* 2 , *ए* 3 ,…, *ए एन* ,… में उत्तराधिकार.

में देखना का ऊपर, *ए अनुक्रम कर सकना होना माना जैसा ए समारोह किसका कार्यक्षेत्र*

*प्राकृत संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय है। कभी-कभी, हम कार्यात्मक का उपयोग करते हैं अंकन एक) के लिए एक ।* \_

#### शृंखला

होने देना *एक* 1 , *एक* 2 , *ए* 3 ,…, *ए एन* , होना ए दिया गया अनुक्रम। तब, अभिव्यक्ति

*a1* \_ + *a2* \_ + *a3* \_ +,… *+ एक \_ +* ...

*दिए गए अनुक्रम से जुड़ी श्रृंखला* कहलाती है । श्रृंखला परिमित या अनंत है अनुसार जैसा दिया गया अनुक्रम है परिमित या अनंत। शृंखला हैं अक्सर का प्रतिनिधित्व किया में

कॉम्पैक्ट फॉर्म, जिसे ग्रीक अक्षर का उपयोग करके *सिग्मा नोटेशन कहा जाता है* ∑ (सिग्मा) के साधन के रूप में यह दर्शाता है योग शामिल। इस प्रकार, शृंखला *एक* 1 *+ एक* 2 + *एक* 3 + ... + *एक \_* है संक्षिप्त

*एन*

∑ .

*एक के* के रूप में

*क* =1

*टिप्पणी* जब श्रृंखला का उपयोग किया जाता है, तो यह संकेतित योग को संदर्भित करता है न कि स्वयं योग को। के लिए उदाहरण, 1 + 3 + 5 + 7 है ए परिमित शृंखला साथ चार शर्तें। कब हम उपयोग मुहावरा " *श्रृंखला का योग* " से हमारा तात्पर्य उस संख्या से होगा जो पदों को जोड़ने पर प्राप्त होती है की राशि शृंखला है 16.

हम अब विचार करना कुछ उदाहरण।

उदाहरण 1 निम्नलिखित द्वारा परिभाषित प्रत्येक अनुक्रम में पहले तीन पद लिखें अगले:

*एन*  3

(मैं) *एक \_* = 2 *एन* + 5, (ii) *एक \_* = 4 .

समाधान (यहाँ मैं *ए एन =* 2 *एन +* 5 स्थानापन्न *एन* = 1, 2, 3, हम पाना

*एक* 1 = 2(1) + 5= 7, *एक* 2 = 9, *एक* 3 = 11

इसलिए, आवश्यक शर्तें हैं 7, 9 और 11।

*एन*  3

(ii) यहाँ *ए* = . इस प्रकार, *ए*

1 3 = − 1 *, ए* = − 1 *, ए* = 0

*एन*  4 1

4 2 2  4 3

138 गणित

इस तरह, पहला तीन शर्तें हैं *–* 1 *, –* 1

2 4

और 0.

उदाहरण 2 क्या है 20 वां अवधि का अनुक्रम परिभाषित द्वारा

*एक \_* = ( *एन* – 1) (2 – *एन* ) (3 + *एन* ) ?

समाधान लाना *एन* = 20 , हम प्राप्त

*एक* 20 = (20 – 1) (2 – 20) (3 + 20)

= 19 × (- 18) × (23) = – 7866.

उदाहरण 3 होने देना अनुक्रम *एक \_* होना परिभाषित जैसा इस प्रकार है:

*एक* 1 = 1, *एक \_* = *एक \_* – 1 + 2 के लिए *एन* ≥ 2.

खोजो पहला पाँच शर्तें और लिखना संगत शृंखला।

समाधान हम पास होना

*a1* \_ = 1, *a2* \_ = *a1* \_ + 2 = 1 + 2 = 3, *a3* \_ = *a2* \_ + 2 = 3 + 2 = 5,

*a4* \_ = *a3* \_ + 2 = 5 + 2 = 7, *a5* \_ = *a4* \_ + 2 = 7 + 2 = 9.

इस तरह, पहला पाँच शर्तें का अनुक्रम हैं 1,3,5,7 और 9. संगत शृंखला 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + है...

EXERCISE 8.1

लिखना पहला पाँच शर्तें का प्रत्येक का दृश्यों में अभ्यास 1 को 6 किसका *एन* वें

शर्तें हैं:

1. *एक एन* = *एन* ( *एन* + 2) 2. *एक \_ =*  1 3. *एक \_ =* 2 *एन*

1. *एक \_* =

2एन3 *\_*  \_

###### 6

1. *एक \_*

= (-1)

*एन* -1

5एन *+* 1

1. *एक \_* = *एन*

*एन* 2 + 5

4 .

खोजो बताए गए शर्तें में प्रत्येक का दृश्यों में अभ्यास 7 को 10 किसका *एन* वें

शर्तें हैं:

*एन* 2

7. *एक एन* = 4 *एन* - 3; *एक* 17 , *एक* 24 8. *एक \_ =* 2 *एन* ; 7

9. *ए* = (-1) *एन* – 1 *एन* 3 ; *एक*  10.

*n* 9

*ए* = *एन* ( *एन* – 2)

#### *एन* + 3

; *एक* 20 .

दृश्यों और शृंखला 139

लिखना पहला पाँच शर्तें का प्रत्येक का दृश्यों में अभ्यास 11 को 13 और प्राप्त संगत शृंखला:

11। *एक* 1

= 3, *एक \_*

= 3 *ए*

*एन* – 1

+ 2 के लिए सभी *एन* > 1 12. *एक* 1

= – 1, *एक \_ =*

*एन* 1 *, एन* ≥ 2

13. *a1* \_ = *a2* \_ *=* 2, *एक \_ = एक \_* - 11 *,* \_ *एन* > 2

14. फाइबोनैचि अनुक्रम है परिभाषित द्वारा

1 = *एक* 1 = *एक* 2 और *एक \_* = *एक \_* – 1 + *एक \_* – 2 , *एन* > 2.

खोजो

*एन* +1

, के लिए *एन* = 1, 2, 3, 4, 5

*एन*

#### ज्यामितिक प्रगति (जी। पी।)

होने देना हम विचार करना अगले अनुक्रम:

(मैं) 2,4,8,16,..., (ii) 1 *,*

1 *,* 1 *, –* 1

(iii) .01,.0001 .000001 ...

9 27 81 243 ...

में प्रत्येक का इन क्रम, कैसे उनका शर्तें प्रगति? हम टिप्पणी वह प्रत्येक अवधि, के अलावा पहले एक निश्चित दिशा में प्रगति करता है आदेश देना।

में (i), हमारे पास है *ए* = 2, *एक* 2 = 2, *एक* 3 = 2, *एक* 4 = 2

1

और इसलिए पर।

*ए* 1 *ए* 2 *ए* 3

में (ii), हम निरीक्षण, *ए* = 1 , *एक* 2 =

1

1 , *एक* 3 =

1 , *एक* 4 = 1 और इसी तरह।

9 *ए* 1

3 *ए* 2

3 *ए* 3 3

इसी प्रकार, राज्य कैसे करना शर्तें में (iii) प्रगति? यह है देखा वह में प्रत्येक मामला, प्रत्येक अवधि के अलावा पहला अवधि भालू ए स्थिर अनुपात को अवधि तुरंत के पिछले

यह। में (मैं), यह स्थिर अनुपात है 2; में (ii), यह है *–* 1 और में (iii), स्थिर अनुपात है 0.01.

3

ऐसा दृश्यों हैं बुलाया *ज्यामितिक अनुक्रम* या *ज्यामितिक प्रगति* संक्षिप्त जैसा जीपी

ए अनुक्रम *एक* 1 , *एक* 2 , *एक* 3 , ..., *एक* , *\_* … है बुलाया *ज्यामितिक प्रगति* , अगर प्रत्येक अवधि है

*एक क* + 1

शून्येतर और = *आर* (स्थिर), के लिए *क* ≥ 1.

*a*

*के*  2 3

द्वारा दे *एक* 1 = *ए* , हम प्राप्त ए ज्यामितिक प्रगति, *ए* , *ar* , *एआर* , *एआर* ,…., कहाँ *ए*

है बुलाया *पहला अवधि* और *आर* है बुलाया *सामान्य अनुपात* का जीपी सामान्य अनुपात में

ज्यामितिक प्रगति (मैं), (ii) और (iii) ऊपर हैं 2, *–* 1

3

और 0.01, क्रमश।

140 गणित

*n का n* वाँ पद या योग ज्ञात करने की समस्याशर्तें का ए ज्यामितिक प्रगति युक्त ए बड़ा संख्या का शर्तें चाहेंगे होना कठिन बिना उपयोग का सूत्रों कौन हम करेगा विकास करना में अगला अनुभाग। हम करेगा उपयोग अगले अंकन साथ इन सूत्र:

*ए* = पहला पद, *आर* = सामान्य अनुपात, *एल* = अंतिम पद,

*एन* = नंबर का शर्तें,

एस *एन* = जोड़ का पहला *एन* शर्तें।

* + 1. *जीपी का सामान्य पद आइए हम* पहले गैर-शून्य पद ' *ए* ' और वाले जीपी पर विचार करें सामान्य अनुपात ' *आर* '। लिखना ए कुछ शर्तें का यह। दूसरा अवधि है प्राप्त किया द्वारा गुणा *ए* द्वारा *आर* , इस प्रकार *एक* 2 = *एआर* . इसी प्रकार, तीसरा अवधि है प्राप्त किया द्वारा गुणा *एक* 2 द्वारा *आर* । इस प्रकार,

*ए* = *ए आर* = *एआर* 2 , और इसलिए पर।

2

3

हम लिखना नीचे इन और कुछ अधिक शर्तें।

1

2

3

1 सेंट अवधि = *ए*

= *ए* = *एआर* 1-1 , 2 दूसरा अवधि = *ए* = *एआर* = *एआर* 2-1 , तीसरा \_ अवधि = *ए*

= *एआर* 2 = *एआर* 3-1

4 वें अवधि = *ए* = *एआर* 3 = *एआर* 4-1 , 5 वाँ अवधि = *ए* = *एआर* 4 = *एआर* 5-1

4

5

करना आप देखना ए नमूना? क्या इच्छा होना 16 वां अवधि?

*एक* 16

= *एआर* 16-1 = *एआर* 15

इसलिए, पैटर्न सुझाव देता है कि *एनवें* अवधि का ए जीपी है दिया गया द्वारा

*ए* = *एआर एन* -1 .

*n*

इस प्रकार, *ए , जीपी को ए* , *एआर* , *एआर* 2 , *एआर* 3 , ... *एआर एन* - 1 के रूप में लिखा जा सकता है ; *ए* , *एआर* , *एआर* 2 ,..., *एआर एन* – 1 ... ;के अनुसार जैसा जीपी है *परिमित* या *अनंत* , क्रमश।

शृंखला *ए* + *एआर* + *एआर* 2 + ... + *एआर एन* -1 या *ए* + *एआर* + *एआर* 2 + ... + *एआर एन* -1 +...हैं बुलाया

*परिमित* या *अनंत ज्यामितिक शृंखला* , क्रमश।

*8.4.2.*  *जोड़ को एन शर्तें का ए जीपी* होने देना पहला अवधि का ए जीपी होना *ए* और सामान्य अनुपात होना *आर* । होने देना हम निरूपित द्वारा एस *एन*  जोड़ को पहला *एन* शर्तें का जीपी तब

एस = *ए* + *एआर* + *एआर* 2 +...+ *एआर एन* -1 ... (1)

*n*

मामला 1 यदि *आर* = 1, हम पास होना एस *एन* = *ए* + *ए* + *ए* + ... + *ए* ( *एन* शर्तें) = *ना*

मामला 2 यदि *आर* ≠ 1, गुणा (1) द्वारा *आर* , हम पास होना

*आर* एस *एन* = *एआर* + *एआर* + *एआर* + ... + *अरे*  ... (2)

2 3 *एन*

घटाने (2) से (1), हम पाना (1 – *आर* ) एस *एन*

= *ए* – *एआर एन* = *ए* (1 – *आर एन* )

यह देता है या

*ए* ( *आर एन* 1)

एस *एन*  *आर* − 1

=

उदाहरण 4 खोजो 10 वीं और *एन* वें शर्तें का जीपी 5, 25,125,… .

समाधान यहाँ *ए* = 5 और *आर* = 5. इस प्रकार, *एक* 10

= 5(5) 10-1 = 5(5) 9 = 5 10

और *एक \_* = *एआर*  = 5(5) = 5 .

*एन* -1 *एन* -1 *एन*

दृश्यों और शृंखला 141

उदाहरण 5 का कौन सा पद जीपी, 2,8,32, *एन* तकशर्तें है 131072?

समाधान होने देना 131072 होना एन *वें* \_ अवधि का दिया गया जीपी यहाँ *ए* = 2 और *आर* = 4. अतः 131072 = *ए* = 2(4) *एन* – 1  या 65536 = 4 *एन* – 1

*n*

यह 4 8 देता है = 4 *एन* – 1.

इसलिए वह *एन* – 1 = 8, अर्थात, *एन* = 9. इस तरह, 131072 है 9 वां अवधि का जीपी

उदाहरण 6 में ए जीपी, तीसरा \_ अवधि है 24 और छठा \_ अवधि है 192.खोजें 10 वीं अवधि।

समाधान यहाँ, *a3* \_

= *एआर* 2 = 24

... (1)

और *ए* = *एआर* 5 = 192

6

... (2)

(2) को (1) से विभाजित करने पर, हमें *r = 2 प्राप्त होता है। (1) में r* = 2 को प्रतिस्थापित करने पर , हमें *a* = 6 प्राप्त होता है। इस तरह *ए* = 6 (2) 9 = 3072.

10

उदाहरण 7 खोजो जोड़ का पहला *एन* शर्तें और जोड़ का पहला 5 शर्तें का ज्यामितिक

शृंखला 1+ 2 + 4 + *...*

3 9

समाधान यहाँ *ए* = 1 और *आर* =

###### 2

3 . इसलिए

  2  

*एन*  1 −  3  

  2  *एन* 

एस = *ए* (1 − *आर*

) = 

   

= 3 1 −  

*एन*  1 − *आर*

1 − 2

3

  3   

  2 5 \_ 

211

211

में विशिष्ट,

S5 \_ = 3 1 −  3   

= 3 × =

243

81 .

3 3





उदाहरण 8 कैसे अनेक शर्तें का जीपी

3069

3 *,*  ,... हैं आवश्यकता है को देना

2 4

जोड़ 512 ?

समाधान होने देना *एन* होना संख्या का शर्तें आवश्यकता है। दिया गया वह *ए* = 3, *आर* = 1 और एस

2 *एन*

= 3069

512

तब से

एस *एन* =

*ए* (1 *– आर एन* ) 1 − *आर*

142 गणित

इसलिए

3069

या = 1

3069 =

512

1

3(1 − 1 )

2 *एन*

1 − 1

2

= 6 1





- 1 



2*n* 

3072

1

या 2

2 *एन*

= 1 - 3069 =

3072

3 = 1

3072 1024

या 2 *एन* = 1024 = 2 10 , कौन देता है *एन* = 10.

13

उदाहरण 9 जोड़ का पहला तीन शर्तें का ए जीपी है 12 और उनका उत्पाद है – 1. खोजो सामान्य अनुपात और शर्तें।

*ए*

समाधान होने देना , *ए* , *एआर* होना पहला तीन शर्तें का जीपी तब

*ए* + *आर* + *ए* = 13

*आर*  12

... (1)

और

 *ए*  ( *ए* ) ( *एआर* ) = *–* 1

 

 *r* 

... (2)

(2) से हमें 3 प्राप्त *होता* है = - 1, अर्थात, *a* = - 1 (केवल वास्तविक जड़ों पर विचार करते हुए) स्थानापन्न *ए* = -1 में (1), हम पास होना

1 13

*– –* 1 *– आर*  या 12 *आर* 2 + 25 *आर* + 12= 0.

12

यह है ए द्विघात में *आर* , सुलझाना, हम पाना

= *-* 3 या *–* 4 .

4 3

4

इस प्रकार, तीन शर्तें का जीपी हैं :

*–* 1, 3

के लिए *आर* =

-3 और

3 , *–* 1,

4 के लिए *आर* = -4 ,

3 4 4 4 3 3

उदाहरण10 खोजो जोड़ का अनुक्रम 7, 77, 777, 7777, ... को *एन* शर्तें।

समाधान यह है नहीं ए जीपी, तथापि, हम कर सकना संबंधित यह को ए जीपी द्वारा लिखना शर्तें जैसा एस *एन* = 7 + 77 + 777 + 7777 + ... से *एन* शर्तें

दृश्यों और शृंखला 143

= 7 [9 + 99 + 999 + 9999 + *...* को *एन* अवधि]

9

= 7 [(10 - 1) + (10 2 - 1) + (10 3 - 1) + (10 4 - 1) + *...एन* शर्तें]

9

= 7 [(10 + 10 2 + 10 3 + *...एन* शर्तें) *–* (1+1+1+... *एन* शर्तें)]

9

7  1 0 ( 1 0 *एन* - 1 ) −  = 7  1 0 ( 1 0 *एन* - 1 ) − 

= 910 \_ \_ − 1

9 \_ 9 \_

*एन*  .

  

उदाहरण 11 एक व्यक्ति के 2 माता-पिता, 4 दादा-दादी, 8 परदादा, इत्यादि हैं। खोजो संख्या का उसका पूर्वज दौरान दस पीढ़ियों के पिछले उसका अपना।

समाधान यहाँ *ए* = 2, *आर* = 2 और *एन* = 10

का उपयोग करते हुए जोड़ सूत्र एस *एन =*

*ए* ( *आर एन* 1)

*आर* − 1

हम एस = है 2(2 10 – 1) = 2046

10

इस तरह, संख्या का पूर्वज के पिछले व्यक्ति है 2046.

8.4.3 *ज्यामितिक अर्थ (जीएम)*  ज्यामितिक अर्थ का दो सकारात्मक नंबर *ए*

और *बी* है संख्या । इसलिए, ज्यामितिक अर्थ का 2 और 8 है 4. हम



*ab*

निरीक्षण करें कि तीन नंबर 2,4,8 क्रमागत पद हैं एक का जीपी यह ए की ओर ले जाता है दो संख्याओं के ज्यामितीय माध्य की अवधारणा का सामान्यीकरण।

कोई भी दिया गया दो सकारात्मक संख्या *ए* और *बी* , हम कर सकते हैं डालना के रूप में कई नंबर जैसा हम पसंद उन दोनों के बीच बनाने के लिए परिणामस्वरूप अनुक्रम में एक जीपी

होने देना जी 1 , जी 2 , *...* , जी *एन* होना *एन* नंबर बीच में सकारात्मक नंबर *ए* और *बी* ऐसा वह

*ए* , जी ,जी ,जी , *…* ,जी , *बी* है ए जीपी इस प्रकार, *बी* प्राणी ( *एन* + 2) वां अवधि,हम पास होना

1 2 3 *एन*

*बी* = *एआर एन* + 1 , या

1

 *बी*  *एन* +1

1

*आर* =  *बी*  *एन* + 1 .

 *a* 

 

2 3

इस तरह

जी = *एआर* = *एक*  

 

1 *a*

, जी = *एआर* 2 = *ए*  *बी*  *एन* +1 ,

2  \_ \_

*a* 

*एन*

जी = *एक र* 3 = *ए*  *बी*  *एन* + 1 ,

3  \_ \_

 *a* 

जी = *एआर* *एन* = *ए*  *बी*  *एन* + 1

*a* 

*एन*   

144 गणित

उदाहरण12 डालना तीन नंबर बीच में 1 और 256 इसलिए वह इस कारण हुई अनुक्रम है ए जीपी

समाधान होने देना जी 1 , जी 2 ,जी 3 होना तीन नंबर बीच में 1 और 256 ऐसा वह 1, जी 1 ,जी 2 ,जी 3 ,256 एक है जीपी

अत: 256 = *आर* 4 दे रही है *आर* = ± 4 (ले रहा असली जड़ों केवल)

*आर* के लिए= 4, हम जी 1 है

= *एआर* = 4, जी 2

= *एआर* 2 = 16, जी

= *एआर* 3 = 64

इसी प्रकार, के लिए *आर* = – 4, नंबर हैं – 4,16 और – 64.

3

इस तरह, हम कर सकते हैं 4 डालें, 16, 64 1 के बीच और 256 इसलिए वह परिणामी क्रम हैं में जीपी

#### संबंध बीच में पूर्वाह्न और जीएम

होने देना ए और जी होना पूर्वाह्न और जीएम का दो दिया गया सकारात्मक असली नंबर *ए* और *बी* , क्रमश। तब

ए = *ए* + *बी*

2

और जी =

इस प्रकार, हम पास होना



*b*

ए – जी =

*ए* + *बी* − =

2 2



*b*



+ *b* − 2 *ab*

( − *बी* ) 2



*a*

= 2 ≥ 0

... (1)

से (1), हम प्राप्त संबंध ए ≥ जी।

उदाहरण 13 अगर पूर्वाह्न और जीएम का दो सकारात्मक नंबर *ए* और *बी* हैं 10 और 8, क्रमश, खोजो नंबर.

समाधान दिया गया वह AM= *ए* + *बी* =10

2

और जीएम== 8



*ab*

... (1)

... (2)

से (1) और (2), हम पाना

*ए* + *बी* = 20 ... (3)

*अब* = 64 ... (4)

लाना कीमत का *ए* और *बी* से (3), (4) में पहचान ( *ए* – *ख* ) 2 = ( *ए* + *ख* ) 2 – 4 *अब* , हम पाना

( *ए* – *ख* ) 2 = 400 – 256 = 144

या *ए* – *बी* = ± 12 ... (5)

दृश्यों और शृंखला 145

हल (3) और (5), हम प्राप्त

*ए* = 4, *बी* = 16 या *ए* = 16, *बी* = 4

इस प्रकार, संख्या *ए* और *बी* 4 हैं, 16 या 16, 4 क्रमश।

EXERCISE 8.2

1. खोजो 20 वां और *एन* वें जीपी की शर्तें

5 5 *,* 5 , ...

2 4 8

1. खोजो 12 वीं अवधि का ए जीपी किसका आठवां \_ अवधि है 192 और सामान्य अनुपात है 2.
2. 5 वां , आठवां \_ और 11 वाँ शर्तें का ए जीपी हैं *पी* , *क्यू* और *एस* , क्रमश। दिखाओ वह *प्रश्न* 2 = *पी.एस.* \_
3. 4 वें अवधि का ए जीपी है वर्ग का इसका दूसरा अवधि, और पहला अवधि है – 3. ठानना इसका 7 वाँ अवधि।
4. कौन अवधि का अगले अनुक्रम:

(ए) 2 *,* 2 2 *,* 4 *,...* है 128 ?

1 1 1 1

(बी) 3 *,* 3 *,* 3 3 *,...* is729 ?

(सी)

*,*  *,*  *,...* है ?

3 9 27 19683

6. के लिए क्या मान का *एक्स* , संख्या 2 *, एक्स, –* 7 हैं में जीपी?

7 2

खोजो जोड़ को बताए गए संख्या का शर्तें में प्रत्येक का ज्यामितिक प्रगति में

अभ्यास 7 को 10:

7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... 20 शर्तें।

8. , , 3 , ... *एन* शर्तें।



7



21



7

9. 1, – *ए* , *एक* 2 , – *एक* 3 , ... *एन* शर्तें (अगर *ए* ≠ – 1).

10. *एक्स* 3 , *एक्स* 5 , *एक्स* 7 , ... *एन* शर्तें (अगर *एक्स* ≠ ± 1).

11

∑

1. मूल्यांकन करें (2 + 3 *कि* )

*क* =1 .

1. जोड़ का पहला तीन शर्तें का ए जीपी है 39

और उनका उत्पाद है 1. खोजो

सामान्य अनुपात और शर्तें। 10

1. कितने शर्तें का जीपी 3, 3 2 , 3 3 , … हैं आवश्यकता है को देना जोड़ 120?
2. जोड़ का पहला तीन शर्तें का ए जीपी है 16 और जोड़ का अगला तीन शर्तें है

128. ठानना पहला अवधि, सामान्य अनुपात और जोड़ को *एन* शर्तें का जीपी

1. दिया गया ए जीपी साथ *ए* = 729 और 7 वाँ अवधि 64, ठानना एस 7 .

146 गणित

1. खोजो ए जीपी के लिए कौन जोड़ का पहला दो शर्तें है – 4 और पांचवां अवधि है 4 टाइम्स तीसरा अवधि।
2. यदि चौथा , \_ 10 वीं और 16 वां शर्तें का ए जीपी हैं *एक्स, वाई* और *z* , क्रमश। सिद्ध करना वह *एक्स, हाँ, जेड* हैं में जीपी
3. खोजो जोड़ को *एन* शर्तें का अनुक्रम, 8, 88, 888, 8888… .
4. खोजो जोड़ का उत्पादों का संगत शर्तें का दृश्यों 2, 4, 8,

16, 32 और 128, 32, 8, 2, 1 .

2

1. दिखाओ वह उत्पादों का संगत शर्तें का दृश्यों *ए, एआर, एआर* 2 *,*

*…एआर एन* – 1 और ए, एआर, एआर 2 ,… एआर *एन -* 1 रूप ए जीपी, और खोजें सामान्य अनुपात.

1. खोजो चार नंबर गठन ए ज्यामितिक प्रगति में कौन तीसरा अवधि है ग्रेटर बजाय पहला अवधि द्वारा 9, और दूसरा अवधि है ग्रेटर बजाय 4 वें द्वारा 18.
2. अगर *पी* वें , *क्यू* वें और *आर* वें शर्तें का ए जीपी हैं *ए* , *बी* और *सी,* क्रमश। सिद्ध करना वह

*एक प्रश्न – आर बी आर – पी सी पी – क्यू* = 1.

1. अगर पहला और *एन* वें अवधि का ए जीपी हैं *ए* और *बी* , क्रमश, और अगर पी है उत्पाद का *एन* शर्तें, सिद्ध करना वह पी 2 = ( *एबी* ) *एन ।*
2. दिखाओ वह अनुपात का जोड़ का पहला *एन* शर्तें का ए जीपी को जोड़ का शर्तें से

( *एन* + 1) वां को (2 *एन* ) वें अवधि है 1 .

*n*

1. अगर *ए, बी, सी* और *डी* हैं में जीपी दिखाओ वह

( *ए* 2 + *बी* 2 + *सी* 2 ) ( *बी* 2 + *सी* 2 + *घ* 2 ) = ( *अब* + *ईसा पूर्व* + *सीडी* ) 2 .

1. डालना दो नंबर बीच में 3 और 81 इसलिए वह इस कारण हुई अनुक्रम है जीपी

*ए एन* +1 + *बी एन* +1

1. खोजो कीमत का *एन* इसलिए वह

*ए* और *बी* ।

*एक \_* + *बी एन*

मई होना ज्यामितिक अर्थ बीच में

1. जोड़ का दो नंबर है 6 टाइम्स उनका ज्यामितिक अर्थ, दिखाओ वह नंबर

हैं में अनुपात ( 3 + 2 2 ) : ( 3 - 2 2 ) .

1. अगर ए और जी होना एएम और जीएम, क्रमश: दो के बीच में सकारात्मक संख्या,

सिद्ध करना वह नंबर हैं ए ± .

*(* A + G *)(* A −G *)*

1. संख्या का जीवाणु में ए निश्चित संस्कृति दोगुना हो जाता है प्रत्येक घंटा। अगर वहाँ थे 30 जीवाणु उपस्थित में संस्कृति मौलिक रूप से, कैसे अनेक जीवाणु इच्छा होना उपस्थित पर अंत का 2 दूसरा घंटा, 4 वें घंटा और *एन* वें घंटा ?

दृश्यों और शृंखला 147

1. क्या इच्छा रुपये 500 मात्रा को में 10 साल बाद इसका जमा में ए किनारा कौन भुगतान करता है वार्षिक दिलचस्पी दर का 10% चक्रवृद्धि सालाना?
2. अगर पूर्वाह्न और जीएम का जड़ों का ए द्विघात समीकरण हैं 8 और 5, क्रमश, तब प्राप्त द्विघात समीकरण.

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 14 अगर *ए, बी, सी, डी* और *पी* हैं अलग असली नंबर ऐसा वह

( *ए* 2 + *बी* 2 + *सी* 2 ) *पी* 2 – 2( *एबी* + *ईसा पूर्व* + *सीडी* ) *पी* + ( *बी* 2 + *सी* 2 + *घ* 2 ) ≤ 0, तब दिखाओ वह *ए, बी, सी* और *डी*

हैं में जीपी

समाधान दिया गया वह

( *ए* 2 + *बी* 2 + *सी* 2 ) *पी* 2 – 2 ( *अब* + *ईसा पूर्व* + *सीडी* ) *पी* + ( *बी* 2 + *सी* 2 + *घ* 2 ) ≤ 0 (1)

लेकिन एलएचएस

= ( *ए* 2 *पी* 2 - 2 *एबीपी* + *बी* 2 ) + ( *b2p2* \_ *\_* \_ - 2 *बीसीपी* + *सी* 2 ) + ( *c2p2* \_ *\_* \_ - 2 *सीडीपी* + *d2* ) ,

कौन देता है ( *एपी* – *ख* ) 2 + ( *बी.पी* – *ग* ) 2 + ( *सी.पी* – *घ* ) 2 ≥ 0 (2)

तब से जोड़ का चौकों का असली नंबर है गैर नकारात्मक, इसलिए, से (1) और (2), हम है, ( *एपी* – *ख* ) 2 + ( *बी.पी* – *ग* ) 2 + ( *सी.पी* – *घ* ) 2 = 0

या *ए.पी – बी =* 0 *, बीपी – सी =* 0 *, सीपी – डी =* 0

यह तात्पर्य वह *ख*  *ग* = *डी* = *पी*

*ए*  *बी*  *सी*

इस तरह *ए* , *बी* , *सी* और *हिम्मत* \_ में जीपी

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 8

1. अगर *एफ* है ए समारोह संतुष्टि देने वाला *एफ* ( *एक्स +y* ) = *एफ* ( *एक्स* ) *एफ* ( *वाई* ) के लिए सभी *एक्स, य* ∈ एन ऐसा वह

*एन*

*च* (1) = 3 और

∑ *एफ* ( *एक्स* ) = 120 , खोजो कीमत का *एन* ।

*एक्स* = 1

1. जोड़ का कुछ शर्तें का जीपी है 315 किसका पहला अवधि और सामान्य अनुपात हैं 5 और 2, क्रमश। खोजो पिछला कार्यकाल और यह की संख्या शर्तें।
2. जीपी का पहला पद 1 है। तीसरे पद और पांचवें पद का योग 90 है। खोजो सामान्य अनुपात का जीपी
3. जोड़ का तीन नंबर में जीपी है 56. अगर हम घटाना 1, 7, 21 से इन नंबर में वह आदेश देना, हम प्राप्त एक अंकगणित प्रगति. खोजो नंबर.
4. ए जीपी बना होना का एक यहां तक की संख्या का शर्तें। अगर जोड़ का सभी शर्तें है 5 टाइम्स जोड़ का शर्तें कब्जे विषम स्थानों, तब खोजो इसका सामान्य अनुपात।

148 गणित

*बी*

1. अगर *ए* − *बीएक्स*

= *बी*  *एक्स* =

*बी* − *सीएक्स*

*डी सी* − *डीएक्स*

( *एक्स* ≠ 0) , तब दिखाओ वह *ए, बी, सी* और *डी* हैं में जीपी

1. होने देना एस होना जोड़, पी उत्पाद और आर जोड़ का पारस्परिक का *एन* शर्तें में ए जीपी

सिद्ध करना वह पी 2 आर *एन* = एस *एन* .

1. अगर *ए, बी, सी, डी* हैं में जीपी, सिद्ध करना वह ( *एक \_* + *बी एन* ), ( *बी एन* + *सी एन* ), ( *सी एन* + *घ n* ) हैं में जीपी
2. अगर *ए* और *बी* हैं जड़ों का *एक्स* 2 – 3 *एक्स* + *पी* = 0 और *सी, डी* हैं जड़ों का *एक्स* 2 – 12 *एक्स* + *क्यू* = 0, कहाँ *ए, बी, सी, डी* रूप ए जीपी सिद्ध करना वह ( *क्यू* + *पी* ) : ( *क्यू* – *पी* ) = 17:15.
3. अनुपात का पूर्वाह्न और के जीएम दो सकारात्मक संख्या *ए* और *बी, है एम : एन* । दिखाओ

वह : *बी* = ( *एम* + *एम* 2 *–* *एन* 2 ) *:* ( *एम* *–*  *एम* 2 *–* *एन* 2 ) .

1. खोजो जोड़ का अगले शृंखला ऊपर को *एन* शर्तें:

(मैं) 5 + 55 +555 + … (ii) .6 +. 66 +. 666+…

1. खोजो 20 वां अवधि का शृंखला 2 × 4 + 4 × 6 + 6 × 8 + ... + *एन* शर्तें।
2. ए किसान खरीदता ए इस्तेमाल किया गया ट्रैक्टर के लिए रुपये 12000. वह भुगतान करता है रुपये 6000 नकद और इससे सहमत को वेतन संतुलन में वार्षिक किश्तों का रुपये 500 प्लस 12% दिलचस्पी पर अवैतनिक मात्रा। कैसे अधिकता इच्छा ट्रैक्टर लागत उसे?
3. शमशाद अली खरीदता ए स्कूटर के लिए रुपये 22000. वह भुगतान करता है रुपये 4000 नकद और इससे सहमत को वेतन संतुलन में वार्षिक किश्त का रुपये 1000 प्लस 10% दिलचस्पी पर अवैतनिक मात्रा। कैसे अधिकता इच्छा स्कूटर लागत उसे?
4. ए व्यक्ति लिखते हैं ए पत्र को चार का उसका दोस्त। वह आह्वान प्रत्येक एक का उन्हें को कॉपी चार अलग-अलग व्यक्तियों को पत्र और मेल इस निर्देश के साथ कि वे इसे स्थानांतरित करें जंजीर इसी तरह. यह मानते हुए वह जंजीर है नहीं टूटा हुआ और वह यह लागत 50 पैसे को एक पत्र मेल करें. पत्र का आठवाँ सेट होने पर डाक पर खर्च की गई राशि ज्ञात कीजिए मेल किया.
5. एक आदमी ने 5% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से एक बैंक में 10000 रुपये जमा किये। खोजो मात्रा में 15 वां वर्ष तब से वह जमा किया मात्रा और भी calculate कुल मात्रा बाद 20 साल।
6. ए उत्पादक गिनाते वह कीमत का ए मशीन, कौन लागत उसे रु. 15625, इच्छा मूल्य कम करना प्रत्येक वर्ष द्वारा 20%. खोजो अनुमानित कीमत पर अंत का 5 साल।
7. 150 कर्मी थे काम में लगा हुआ को खत्म करना ए काम में ए निश्चित संख्या का दिन. 4 कर्मी गिरा दिया बाहर पर दूसरा दिन, 4 अधिक कर्मी गिरा दिया बाहर पर तीसरा दिन और इसलिए पर। यह लिया 8 अधिक दिन को खत्म करना काम। खोजो संख्या का दिन में कौन काम था पुरा होना।

दृश्यों और शृंखला 149

*सारांश*



� द्वारा ए *अनुक्रम* , हम अर्थ एक व्यवस्था का संख्या में निश्चित आदेश अनुसार

किसी नियम के लिए. साथ ही, हम अनुक्रम को एक फ़ंक्शन के रूप में परिभाषित करते हैं जिसका डोमेन है तय करना का प्राकृतिक नंबर या कुछ सबसेट का प्रकार {1, 2, 3, *क* }। ए अनुक्रम

इसमें पदों की एक सीमित संख्या होती है को फ़ोन किया *परिमित क्रम* . ए अनुक्रम है बुलाया *अनंत* अगर यह है नहीं ए परिमित क्रम.

चलो *एक* 1 *, एक* 2 *, एक* 3 , ... होना अनुक्रम, तब जोड़ व्यक्त जैसा *एक* 1 + *एक* 2 + *एक* 3 + ...

*शृंखला* कहलाती है . एक श्रृंखला को *परिमित श्रृंखला कहा जाता है* यदि इसमें परिमित संख्या होती है शर्तें।

किसी अनुक्रम को *ज्यामितीय प्रगति* या *जीपी* कहा जाता है , यदि कोई अनुपात हो अवधि को इसका के पिछले अवधि है वही लगातार। यह स्थिर कारक है बुलाया

सामान्य *अनुपात* . आमतौर पर, हम GP के पहले पद को *a* और उसके द्वारा निरूपित करते हैं *r* द्वारा सामान्य अनुपात । GP का सामान्य या *n* वाँ पद *a* = *ar n* - 1 द्वारा दिया जाता है । जोड़ एस *एन* का पहला *एन* शर्तें का जीपी है दिया गया द्वारा

*n*

एस *एन =*

*ए* ( *आर एन* – 1 )

*या*

*–* 1

*ए* ( 1- *आर एन* )

1 – *आर*

*, अगर आर* ≠ 1

- ज्यामितीय माध्य (जीएम) किसी के भी दो सकारात्मक नंबर *ए* और *बी* है दिया गया द्वारा

*बी* अर्थात, अनुक्रम *ए* , जी, *बी* है जीपी

*Historical Note*

Evidence is found that Babylonians, some 4000 years ago, knew of arithmetic and geometric sequences. According to Boethius (510), arithmetic and geometric sequences were known to early Greek writers. Among the Indian mathematician, Aryabhatta (476) was the first to give the formula for the sum of squares and cubes of natural numbers in his famous work Aryabhatiyam, written around

499. He also gave the formula for finding the sum to *n* terms of an arithmetic sequence starting with *p*th term. Noted Indian mathematicians Brahmgupta

150 गणित

(598), Mahavira (850) and Bhaskara (1114-1185) also considered the sum of squares and cubes. Another specific type of sequence having important applications in mathematics, called *Fibonacci sequence*, was discovered by Italian mathematician Leonardo Fibonacci (1170-1250). Seventeenth century witnessed the classification of series into specific forms. In 1671 James Gregory used the term infinite series in connection with infinite sequence. It was only through the rigorous development of algebraic and set theoretic tools that the concepts related to sequence and series could be formulated suitably.

— **�** —

अध्याय 9

STRAIGHT LINES

- जी*इओमेट्री, जैसा ए तार्किक प्रणाली, है ए मतलब और यहां तक की अधिकांश ताकतवर मतलब को बनाना बच्चे अनुभव करना ताकत का इंसान आत्मा वह है*

*का उनका अपना आत्मा। – एच। फ्रायडेन्थल*

#### परिचय

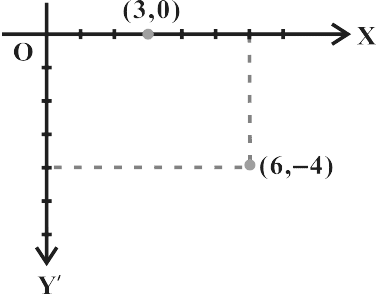
हम हैं परिचित साथ दो आयामी *कोआर्डिनेट ज्यामिति* से पहले कक्षाएं. मुख्य रूप से, यह है ए संयोजन का *बीजगणित* और *ज्यामिति* . उपयोग द्वारा ज्यामिति का व्यवस्थित अध्ययन का बीजगणित था पहला ले जाया गया बाहर द्वारा मनाया है फ़्रेंच दार्शनिक और गणितज्ञ रेने डेसकार्टेस, में उसका किताब 'ला ज्यामिति, प्रकाशित में 1637. यह किताब पुर: एक वक्र के समीकरण की धारणा और संबंधित विश्लेषणात्मक तरीकों में अध्ययन का ज्यामिति. इस कारण हुई विश्लेषण और ज्यामिति के संयोजन को अब कहा जाता है *विश्लेषणात्मक ज्यामिति.* में पहले कक्षाएं, हम शुरू किया

अध्ययन का कोआर्डिनेट ज्यामिति, कहाँ हम अध्ययन के बारे में कोआर्डिनेट कुल्हाड़ी, कोआर्डिनेट विमान, अंकन का अंक में ए

रेने डेसकार्टेस (1596 -1650)

समतल, दो बिंदुओं के बीच की दूरी, अनुभाग सूत्र, आदि ये सभी अवधारणाएँ हैं मूल बातें का निर्देशांक ज्यामिति।

होने देना हम पास होना ए संक्षिप्त याद करना का कोआर्डिनेट ज्यामिति हो गया में पहले कक्षाएं. को

बिंदुओं का स्थान (6,-4) और पुनः दोहराएँ (3, 0) में XY विमान है दिखाया में अंजीर 9.1.

हम मई टिप्पणी वह बिंदु (6, – 4) है पर 6 इकाइयां दूरी से *y* -अक्ष मापा साथ में सकारात्मक *एक्स* -अक्ष और पर 4 इकाइयां दूरी से *एक्स* -अक्ष ऋणात्मक *y-* अक्ष के अनुदिश मापा गया। इसी प्रकार, बिंदु (3, 0) *y-* अक्ष से 3 इकाई की दूरी पर है साथ मापा गया धनात्मक *x-* अक्ष और शून्य है दूरी से *एक्स* -अक्ष.

हम भी अध्ययन वहाँ अगले महत्वपूर्ण सूत्र:

अंजीर 9.1

152 गणित

1. दूरी बीच में अंक पी ( *एक्स* 1, *य* 1 ) और क्यू ( *एक्स* 2 , *य* 2 ) है

पी क्यू =

(

*x – x* + *y – y*

1 ) (

2

1

)

2

2

2

के लिए उदाहरण, दूरी बीच में अंक (6, – 4) और (3, 0) है

== \_ 5 इकाइयाँ।

(3 6)2 + (0 + 4)2

9 + 16

1. COORDINATES का ए बिंदु डिवाइडिंग रेखा खंड में शामिल होने अंक ( *एक्स* 1 , *य* 1 )

 *एम एक्स* 2 + *एन एक्स* 1 *एम य* 2 + *एन य* 1 

और ( *एक्स* , *य* ) आंतरिक रूप से, में अनुपात *एम: एन* हैं 

2 2 

*एम* + *एन*  ,

*एम* + *एन*   .

के लिए उदाहरण, COORDINATES का बिंदु कौन विभाजित रेखा खंड में शामिल होने



ए (1, -3) और बी (-3, 9) आंतरिक रूप से, में अनुपात 1: 3 हैं दिया गया द्वारा

*एक्स* = 1 *.* ( 3) + 3 *.* 1 = 0

1+ \_ 3

और

*य* = 1.9 + 3. ( -3 ) = 0.

#### 1 + 3

1. में विशिष्ट, अगर *एम* = *एन* , COORDINATES का मध्य-बिंदु का रेखा खंड

में शामिल होने अंक ( *एक्स*

 *एक्स* 1 + *एक्स* 2



,

*य* ) और ( *एक्स* , *य* ) हैं

*य* 1 + *य* 2 

.



1, 1

2 2  2 2 

1. क्षेत्र का त्रिकोण किसका कोने हैं ( *एक्स* 1, *य* 1 ), ( *एक्स* 2 , *य* 2 ) और ( *एक्स* 3 , *य* 3 ) है

*एक्स* ( *और*

1

2

* *और* ) + *एक्स* ( *और*
* *और* ) + *एक्स* ( *और*

– *और* ) .

1 2 3

2 3 1

3 1 2

के लिए उदाहरण, क्षेत्र का त्रिकोण, किसका कोने हैं (4, 4), (3, – 2) और (- 3, 16) है

4( - 2 − 16) + 3(16 − 4) + ( − 3)(4 + 2) =

1

2

– 54 = 27.

2

यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य है, तो तीन बिंदु A, B और C पर स्थित हैं ए रेखा, अर्थात, वे हैं संरेख.

*Remark*

में यह अध्याय, हम करेगा जारी रखना अध्ययन का कोआर्डिनेट ज्यामिति को अध्ययन सबसे सरल ज्यामितीय आकृति के गुण - *सीधी रेखा।* अपनी सादगी के बावजूद, रेखा ज्यामिति की एक महत्वपूर्ण अवधारणा है और हमारे दैनिक अनुभवों में अनगिनत संख्या में प्रवेश करती है दिलचस्प और उपयोगी तरीके. मुख्य फोकस रेखा को बीजगणितीय रूप से प्रस्तुत करने पर है कौन *ढलान* है अधिकांश आवश्यक।

#### ढलान का ए रेखा

ए रेखा में ए कोआर्डिनेट विमान फार्म दो एंगल्स साथ *एक्स* -अक्ष, कौन हैं पूरक.

सीधा पंक्तियाँ 153

कोण (कहना) θ बनाया द्वारा रेखा *एल* साथ सकारात्मक दिशा का *एक्स* -अक्ष और मापा एंटी दक्षिणावर्त *रेखा का झुकाव* कहलाता है । ज़ाहिर तौर से 0° ≤ θ ≤ 180° (अंजीर 9.2).

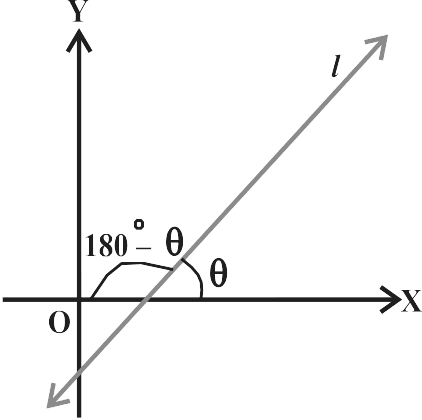


Fig 9.2

हम निरीक्षण वह पंक्तियां समानांतर को *एक्स* -अक्ष, या

संयोग साथ *एक्स* -अक्ष, पास होना झुकाव का 0°. झुकाव का ए खड़ा रेखा (समानांतर को या संयोग साथ *y* -अक्ष) है 90°.

परिभाषा 1 यदि θ है झुकाव का ए रेखा *l* , तो tan θ को *ढलान* या *ढाल* कहा जाता है रेखा *एल* .

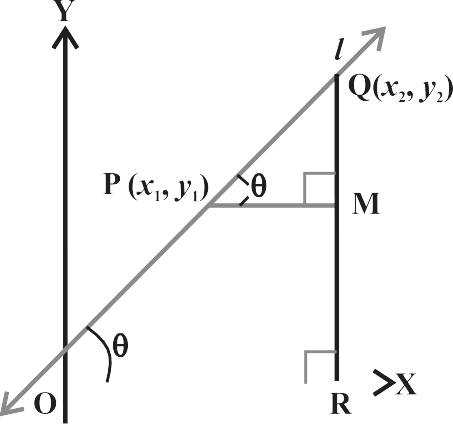
ढलान का ए रेखा किसका झुकाव है 90° है नहीं परिभाषित।

ढलान का ए रेखा है लक्षित द्वारा *एम* । इस प्रकार, *एम* = टैन θ , θ ≠ 90°

यह मई होना उस पर गौर किया की ढलान *एक्स* -अक्ष है शून्य और ढलान का *y* -अक्ष है नहीं परिभाषित।

* + 1. *ढलान का ए रेखा कब COORDINATES का कोई दो अंक पर रेखा हैं दिया गया*

हम जानना वह ए रेखा है पूरी तरह दृढ़ निश्चय वाला कब हम हैं दिया गया दो अंक पर यह।

इसलिए, हम a का ढलान ज्ञात करने के लिए आगे बढ़ते हैं रेखा में शर्तें का COORDINATES का दो अंक पर रेखा।

होने देना पी( *एक्स* 1 , *य* 1 ) और क्यू( *x* 2 , *य* 2 ) होना दो अंक पर गैर ऊर्ध्वाधर रेखा *एल* किसका झुकाव

है θ . ज़ाहिर तौर से, *एक्स* ≠ *एक्स* , अन्यथा रेखा

2

1

*x-* अक्ष और उसके लंबवत हो जाएगा ढलान इच्छा नहीं होना परिभाषित। झुकाव का रेखा *l* तीव्र या अधिक हो सकती है। हमें करने दो लेना इन दो मामले.

खींचना सीधा QR को *एक्स* -अक्ष और

बजे सीधा को आरक्यू जैसा दिखाया में अंजीर. 9.3 (मैं) और (ii).

मामला 1 कब कोण θ है तीव्र:

अंजीर 9. 3 (मैं)

में अंजीर 9.3 (मैं), ∠ एमपीक्यू = θ (1)

इसलिए, ढलान का रेखा *एल* = *एम* = टैन θ .

लेकिन में ∆ एमपीक्यू, हम पास होना

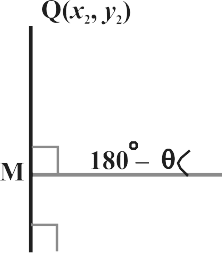
tanθ = एमक्यू = *य* 2 − *य* 1 .

... (2)

एमपी *एक्स* 2 − *एक्स* 1

154 गणित

से समीकरण (1) और (2), हम पास होना



*एम* = *य* 2 − *य* 1 .

2 − *एक्स* 1

मामला द्वितीय कब कोण θ है कुंठित:

में अंजीर 9.3 (ii), हम पास होना

∠ एमपीक्यू = 180° – θ .

इसलिए, θ = 180° – ∠ एमपीक्यू.

अब, ढलान का रेखा *एल*

*एम* = तन θ

= टैन ( 180° – ∠ एमपीक्यू) = – टैन ∠ एमपीक्यू

अंजीर 9. 3 (ii)

= − एमक्यू = − *य* 2

*y1* \_ = *य* 2 *य* 1

एमपी 1 *एक्स* 2

2 − *एक्स* 1

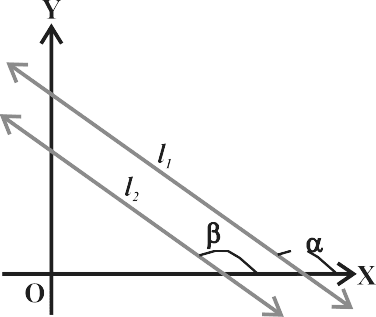
फलस्वरूप, हम देखना वह में दोनों मामलों ढलान *एम* का रेखा के माध्यम से अंक

( *एक्स* , *य* ) और ( *एक्स* , *य* ) है दिया गया द्वारा

*एम* = *य* 2 − *य* 1 .

1 1 2 2

2 - *एक्स* 1

* + 1. *उनके संदर्भ में रेखाओं की समानता और लंबवतता के लिए शर्तें एक समन्वय विमान में ढलान* , मान लीजिए कि गैर-ऊर्ध्वाधर *पंक्तियाँ एल* 1 और *एल* 2 में ढलान है *मी* 1 *और एम* 2 *,* क्रमश। होने देना उनका हठ होना α और

β , क्रमश।

यदि रेखा *l* 1 *l* 2 के समानांतर है (चित्र 9.4), तो उनका हठ हैं बराबर, अर्थात,

α = β , और इस तरह, टैन α = तन β

इसलिए *मी* 1 = *मी* 2 , यानी, उनकी ढलानें हैं बराबर।

इसके विपरीत, अगर ढलान का दो पंक्तियां *मैं* 1 और *मैं* 2

है वही, अर्थात,

*एम* \_ = *एम* \_ \_

फिर तन α = तन β .

अंजीर 9. 4

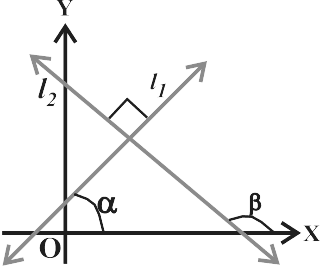
द्वारा संपत्ति का स्पर्शरेखा समारोह (बीच में 0° और 180°), α = β .

इसलिए, पंक्तियां हैं समानांतर।

सीधा पंक्तियाँ 155

*इस तरह, दो गैर खड़ा पंक्तियां मैं* 1 *और मैं* 2 *हैं समानांतर अगर और केवल अगर उनका ढलानों हैं बराबर।*

अगर पंक्तियां *मैं* 1 और *मैं* 2 हैं सीधा (अंजीर 9.5), तब β = α + 90° *.*

इसलिए, टैन β = टैन ( α + 90°)

= – खाट ए =

– 1

टैन

यानी, *एम* 2

= − 1

1

या *एम* 1 *एम2* \_

= – 1

इसके विपरीत, यदि *एम* 1 *एम* \_ = – 1, अर्थात, tan α tan β = – 1. तब टैन α = – खाट β = टैन ( β ) + 90°) या टैन ( β ) – 90°) इसलिए, α और β अलग होना द्वारा 90°.

इस प्रकार, पंक्तियां *मैं* 1 और *मैं* 2 हैं सीधा को प्रत्येक अन्य।

अंजीर 9. 5

इस तरह, *दो गैर ऊर्ध्वाधर पंक्तियां हैं सीधा को प्रत्येक अन्य अगर और केवल अगर उनका ढलानों हैं नकारात्मक पारस्परिक का प्रत्येक अन्य,*

यानी, *एम* = − 1

2

1

या, *मी* 1

*मी* 2 = – 1.

#### होने देना हम विचार करना अगले उदाहरण।

उदाहरण 1 खोजो ढलान का पंक्तियाँ:

* 1. पासिंग के माध्यम से अंक (3, – 2) और (-1, 4),
  2. पासिंग के माध्यम से अंक (3, – 2) और (7, – 2),
  3. पासिंग के माध्यम से अंक (3, – 2) और (3, 4),
  4. निर्माण झुकाव का 60° साथ सकारात्मक दिशा का *एक्स* -अक्ष.

समाधान (ए) ढाल की लाइन थ्रू (3, – 2) और (- 1,4) है

*मी*  4 − ( −2 ) = 6 = − 3 .

− 1 − 3 − 4 2

* + 1. ढलान का रेखा के माध्यम से अंक (3, – 2) और (7,- 2) है

###### *मी* -2 – (-2) = 0 = 0 .

7- 3 4

* + 1. ढलान का रेखा के माध्यम से अंक (3, – 2) और (3, 4) है

156 गणित

*एम*

4 – (-2) =

6

, कौन है नहीं परिभाषित।

3 – 3 0

* + 1. यहाँ झुकाव का रेखा α = 60°. इसलिए, ढलान का रेखा है

*एम* = टैन 60° = .



3

* + 1. *दो रेखाओं के बीच का कोण* जब हम एक समतल में एक से अधिक रेखाओं के बारे में सोचते हैं, तब हम खोजो वह इन पंक्तियां हैं दोनों में से एक अन्तर्विभाजक या समानांतर। यहाँ हम इच्छा चर्चा करना कोण बीच में दो पंक्तियां में शर्तें का उनका ढलान.

2

1

होने देना एल 1 और एल 2 होना दो गैर ऊर्ध्वाधर पंक्तियां साथ ढलानों *मी* 1

और *एम* , क्रमश। अगर α

और α हैं हठ का पंक्तियां एल

2

1

और एल 2 , क्रमश। तब

*एम* 1  टैनα 1 और *एम* 2 टैनα 2 .

हम जानते हैं कि जब दो रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं तो वे दो जोड़े बनाती हैं खड़ी विलोम एंगल्स ऐसा वह जोड़ का कोई दो नज़दीक एंगल्स है 180°. होने देना θ और φ होना नज़दीक एंगल्स बीच में पंक्तियां एल 1 और एल 2 (अंजीर 9.6). तब

मैं = ए 2 - ए'1 \_ और ए 1 , ए 2 ≠ 90°.

इसलिए टैन मैं = टैन ( ए

– ए )

= टैन ए 2

टैन α 1 =

2 − *मी* 1

(जैसा 1 + *एम एम*

≠ 0)

2  1  1+ \_ टैन α

टैन α

1 + *एम*  1 2

और पीएचआई = 180° – मैं इसलिए वह

1 2 1 2

टैन पीएचआई = टैन (180° – मैं ) =- टैन मैं = –

2 *मी* 1

, जैसा 1 + *एम एम* ≠ 0

1 + 1 *मी* 2 1 2



Fig 9. 6

अब, वहाँ उठना दो मामले:

सीधा पंक्तियाँ 157

*एम2* \_ *- एम1* \_

मामला मैं अगर 1 *+ एम* 1 *एम* 2 है \_ सकारात्मक, तब टैन θ इच्छा होना सकारात्मक और टैन φ इच्छा होना नकारात्मक,

कौन मतलब θ होगा होना तीव्र और φ इच्छा होना कुंठित.

*मी* 2 *– मी* 1

मामला द्वितीय अगर 1 *+*  1 *मी* 2 है नकारात्मक, तब टैन θ इच्छा होना नकारात्मक और टैन φ इच्छा होना सकारात्मक,

कौन मतलब वह θ होगा होना कुंठित और φ इच्छा होना तीव्र।

इस प्रकार, तीव्र कोण (कहना θ ) बीच में पंक्तियां एल 1 और एल 2 साथ ढलानों *मी* 1 और *एम* 2 , क्रमश, है दिया गया द्वारा

टैन θ

*एम2* \_ − *एम1* \_

1 + *एम1 एम2* \_ \_

, जैसा 1 + *एम1 एम2* \_ \_ ≠ 0

... (1)

कुंठित कोण (कहना φ ) कर सकना होना मिला द्वारा का उपयोग करते हुए φ =180 0 – θ *.*

1

उदाहरण 2 यदि दो रेखाओं के बीच का कोण 4 है और एक रेखा का ढलान 2 है , तो ज्ञात कीजिए ढलान का अन्य रेखा।

समाधान हम जानना वह तीव्र कोण θ बीच में दो पंक्तियां साथ ढलानों *मी* 1 और *मी* 2

है दिया गया द्वारा

#### 1

टैन θ =

*एम2* \_ − *एम1* \_

1 + *एम1 एम2* \_ \_

... (1)

होने देना *मी* 1 = 2 *, मी* 2 = *एम* और θ = 4 .

अब, डाल इन मान में (1), हम पाना

*एम* − 1

*एम* − 1

टैन π =

4

*एम* − 1

2

1 + 1 *एम*

2

या 1 =

*एम* − 1

2

1+ \_ 1 *एम*

2

2 = 1 या 2 = 1 *.*

कौन देता है

1 + 1 *एम*

1 + 1 *एम*

2 2

158 गणित

अतः 3 या

*एम* = − 1 *.*

3



इस तरह, दूसरे की ढलान लाइन है

3 या

– 1 . अंजीर 9.7 बताते हैं

3

कारण का दो उत्तर.

अंजीर 9.7

उदाहरण 3 बिंदु (-2, 6) और (4, 8) से गुजरने वाली रेखा रेखा पर लंबवत है के माध्यम से अंक (8, 12) और ( *एक्स* , 24). खोजो कीमत का *एक्स* ।

समाधान ढलान का रेखा के माध्यम से अंक (- 2, 6) और (4, 8) है

8 6

*म* 1 4 − ( − 2 )

= 2 = 1

6 3

ढलान का रेखा के माध्यम से अंक (8, 12) और ( *एक्स* , 24) है

*एम* = 24 12 =

2  - 8

12

*एक्स* − 8

तब से दो पंक्तियां हैं लंबवत,

*मी* 1 *मी* 2 = -1, कौन देता है

1 × 12

3 − 8

= − 1 या *एक्स* = 4 .

EXERCISE 9.1

1. चित्रित करो चतुर्भुज में काटीज़ियन विमान, किसका शीर्ष हैं (-4, 5), (0, 7), (5,- 5) और (- 4, –2). भी, खोजो इसका क्षेत्र।
2. आधार का एक समभुज त्रिकोण साथ ओर 2 *ए* झूठ साथ में *y* -अक्ष ऐसा वह मध्य-बिंदु का आधार है पर मूल। खोजो कोने का त्रिकोण.

सीधा पंक्तियाँ 159

1. खोजो दूरी बीच में पी ( *एक्स* 1 *, य* 1 ) और क्यू ( *एक्स* 2 *, य* 2 ) कब : (मैं) पी क्यू है समानांतर को

*y* -अक्ष, (ii) पी क्यू है समानांतर को *एक्स* -अक्ष.

1. खोजो ए बिंदु पर *एक्स* -अक्ष, कौन है समान दूरी से अंक (7, 6) और (3, 4).
2. खोजो ढलान का ए रेखा, कौन गुजरता के माध्यम से मूल, और मध्य-बिंदु का रेखा खंड में शामिल होने अंक पी (0, *–* 4) और बी (8, 0).
3. बिना का उपयोग करते हुए पाइथागोरस प्रमेय, दिखाओ वह अंक (4, 4), (3, 5) और ( *-* 11 ) *\_* हैं कोने का ए सही कोणीय त्रिकोण.
4. खोजो ढलान का रेखा, कौन बनाता है एक कोण का 30 ° साथ सकारात्मक दिशा का *y-* अक्ष मापा गया वामा व्रत।
5. बिना का उपयोग करते हुए दूरी सूत्र, दिखाओ वह अंक ( *-* 2, *–* 1), (4, 0), (3, 3) और ( *-3* , 2) हैं कोने का ए समांतर चतुर्भुज
6. खोजो कोण बीच में *एक्स-* अक्ष और रेखा में शामिल होने अंक (3, *-1* ) और (4, *-2* ).
7. ढलान का ए रेखा है दोहरा का ढलान का एक और रेखा। अगर स्पर्शरेखा का कोण

###### 1

बीच में उन्हें है 3 , खोजो ढलानों का पंक्तियाँ.

1. ए रेखा गुजरता के माध्यम से ( *एक्स* 1 *, य* 1 ) और ( *एच, क* )। अगर ढलान का रेखा है *मी* , दिखाओ वह

*क – य* 1 = *एम* ( *एच – x* 1 ).

#### विभिन्न फार्म का समीकरण का ए रेखा

हम जानना वह प्रत्येक रेखा में ए विमान रोकना असीम अनेक अंक पर यह। यह संबंध बीच में रेखा और अंक नेतृत्व हम को खोजो समाधान का अगले संकट:

कैसे कर सकना हम कहना वह ए दिया गया बिंदु झूठ पर दिया गया रेखा? इसका उत्तर मई होना वह किसी दी गई रेखा के लिए हमें रेखा पर स्थित बिंदुओं पर एक निश्चित शर्त रखनी चाहिए। मान लीजिए कि P ( *x, y* ) XY-तल में एक मनमाना बिंदु है और L दी गई रेखा है। के लिए L के समीकरण में, हम बिंदु P के लिए एक *कथन* या *शर्त* बनाना चाहते हैं सत्य है, जब P, L पर है, अन्यथा असत्य है। निःसंदेह यह कथन केवल बीजगणितीय है चर *x* और *y से युक्त समीकरण* । अब, हम एक रेखा के समीकरण पर चर्चा करेंगे अंतर्गत अलग स्थितियाँ।

* + 1. *क्षैतिज और खड़ा पंक्तियां* यदि एक क्षैतिज लाइन एल है पर ए दूरी *एक* से *एक्स* - तब रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु की धुरी या तो *a* या - *a होती है* [आकृति 9.8 (ए)] *।* इसलिए, समीकरण का रेखा एल है दोनों में से एक *य* = *ए* या *य =* – *ए* । पसंद का संकेत इच्छा निर्भर करना ऊपर पद का रेखा अनुसार जैसा रेखा है ऊपर या नीचे *y* -अक्ष. इसी प्रकार, समीकरण का ए खड़ा रेखा पर ए दूरी *बी* से *y* -अक्ष है दोनों में से एक *एक्स* = *बी* या *एक्स* = – *बी* [अंजीर 9.8(बी)].

160 गणित



9.8



अंजीर

उदाहरण 4 रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए अक्षों के समानान्तर तथा गुजरने वाली (- 2, 3).

समाधान में रेखाओं की स्थिति दर्शाई गई है अंजीर 9.9. *आप-* समन्वय का प्रत्येक बिंदु पर *x- अक्ष* के समानांतर रेखा 3 है, इसलिए, समीकरण का रेखा समानांतर *x-* अक्ष पर और पासिंग के माध्यम से (- 2, 3) है *य* = 3. इसी प्रकार, समीकरण का रेखा *y- अक्ष* के समानांतर और (- 2, 3) से होकर गुजर रहा है है *एक्स* = – 2.

* + 1. *बिंदु-ढलान रूप* लगता है कि P 0 ( *x* 0 *, y* 0 ) एक गैर-ऊर्ध्वाधर पर एक निश्चित बिंदु है रेखा L, जिसका ढलान *m है* । मान लीजिए P( *x,y* ) एक है मनमाना बिंदु पर एल (अंजीर 9.10).

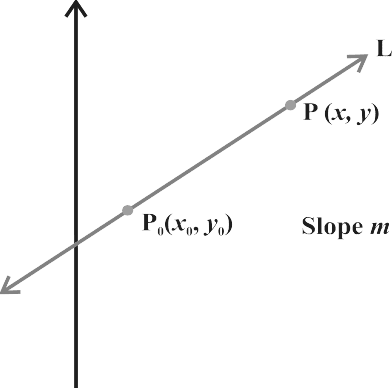
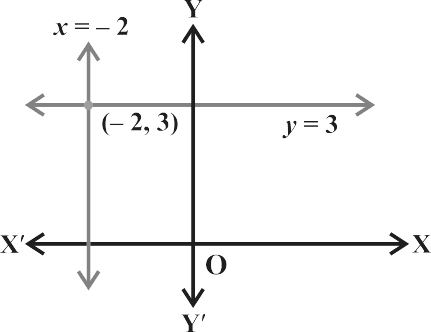


Fig 9.10

तब, द्वारा परिभाषा, ढलान का एल है दिया गया द्वारा



अंजीर 9.9

*एम* = *य* − *य* 0 , अर्थात,

*एक्स* − *एक्स* 0

*य* − *य* 0

= *एम* ( *एक्स* − *x* 0 )

...(1)

चूंकि बिंदु P 0 ( *x* 0 *, y* 0 ) सहित सभी अंक ( *एक्स, य* ) पर एल संतुष्ट (1) और नहीं अन्य बिंदु में विमान संतुष्ट (1). समीकरण (1) है वास्तव में समीकरण के लिए दिया गया रेखा एल

सीधा पंक्तियाँ 161

इस प्रकार, बिंदु ( *एक्स, य* ) झूठ पर रेखा साथ ढलान *एम* के माध्यम से तय बिंदु ( *एक्स* 0 *, य* 0 ), अगर और केवल अगर, इसका COORDINATES संतुष्ट समीकरण

*य* – *य* 0 *= एम* ( *एक्स* – *x* 0 )

उदाहरण 5 समीकरण ज्ञात कीजिए रेखा के माध्यम से (- 2, 3) ढलान के साथ – 4.

समाधान यहाँ *एम* = – 4 और दिया गया बिंदु ( *एक्स* 0 *, य* 0 ) है (- 2, 3).

द्वारा ढलान अवरोधन रूप FORMULA

1. ऊपर, समीकरण का दिया गया रेखा है



*य* – 3 = – 4 ( *एक्स* + 2) या 4 *x* + *y* + 5 = 0, जो है आवश्यक समीकरण.

* + 1. *दो-बिंदु प्रपत्र* चलो रेखा एल गुजरता के माध्यम से दो दिया गया अंक P 1 ( *x* 1 *, y* 1 ) और P 2 ( *x* 2 *, y* 2 ). मान लीजिए P( *x,y* ) एक सामान्य बिंदु है पर एल (अंजीर 9.11).

तीन अंक पी 1 , पी 2 और पी हैं संरेख, इसलिए, हमारे पास है ढलान का पी 1 पी = ढलान का पी 1 पी 2

अंजीर 9.11

*य* − *य* 1 = *y* 2 − *य* 1

या *y* − *य*

= *य* 2 − *य* 1 *( एक्स* − *).*

#### अर्थात,

*एक्स* − *एक्स*  *एक्स* − *एक्स*

1  *एक्स* - *एक्स*  1

1 2 1 2 1

इस प्रकार, समीकरण का रेखा पासिंग के माध्यम से अंक ( *एक्स* 1 *, य* 1 ) और ( *एक्स* 2 *, य* 2 ) है दिया गया द्वारा

*य* − *य* = *य* 2 − *य* 1 ( *एक्स* − *एक्स* )

1

1

*एक्स* 2 − *एक्स* 1

... (2)

उदाहरण 6 लिखना समीकरण की के माध्यम से रेखा अंक (1, –1) और (3,5).

समाधान यहाँ *एक्स* 1 = 1, *य* 1 = – 1, *एक्स* 2 = 3 और *य* 2 = 5. का उपयोग करते हुए दो प्वाइंट रूप (2) ऊपर के लिए समीकरण का रेखा, हम पास होना

*और*  1 ) \_ = 5 – ( -1 ) ( *एक्स* – 1 )

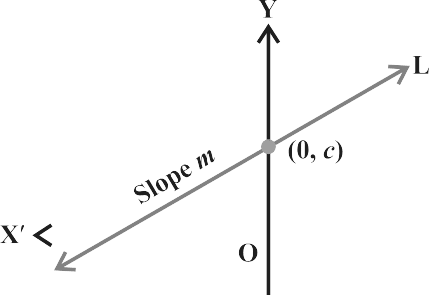
#### 3 – 1

या -3 *x* + *य* + 4 = 0, कौन है आवश्यक समीकरण.

* + 1. *ढलान अवरोधन रूप* कभी-कभी ए रेखा है ज्ञात को हम साथ इसका ढलान और एक अवरोधन पर एक का कुल्हाड़ियाँ हम इच्छा अब खोजो समीकरण का ऐसा पंक्तियाँ.

162 गणित

केस I मान लीजिए कि एक रेखा L ढलान *m के साथ* कटती है y- अक्ष मूल बिंदु से दूरी *c पर है* (चित्र 9.12)। दूरी *c को y* कहा जाता है- *अवरोधन* का रेखा एल ज़ाहिर तौर से, COORDINATES का बिंदु कहाँ रेखा मिलो y- अक्ष (0, *c* ) हैं *।* इस प्रकार, L का ढलान *m है* और एक निश्चित बिंदु (0, *c* ) से होकर गुजरता है। इसलिए, द्वारा प्वाइंट ढाल रूप, समीकरण का एल है



*य सी* = *एम( एक्स* − 0 *)* या

*य* = *एमएक्स* + *सी*

अंजीर 9.12

इस प्रकार, बिंदु ( *x,y* ) पर ढलान वाली रेखा *एम* और *y* -अवरोधन *सी* पर स्थित है लाइन अगर और केवल अगर

*य = एमएक्स +सी*  *..* .(3)

टिप्पणी वह कीमत का *सी* इच्छा होना सकारात्मक या नकारात्मक अनुसार जैसा अवरोधन है बनाया पर सकारात्मक या नकारात्मक ओर का *y* -अक्ष, क्रमश।

मामला द्वितीय कल्पना करना रेखा एल साथ ढलान *एम* बनाता है *एक्स-* अवरोधन *डी* । तब समीकरण का एल है

*य = एम(एक्स – डी)*  ... (4)

छात्र मई इसे प्राप्त करें समीकरण स्वयं द्वारा जो उसी तरीका के रूप में मामला मैं।

###### 1

उदाहरण 7 लिखना समीकरण का पंक्तियां के लिए कौन टैन θ = 2 , कहाँ θ है

3

झुकाव का रेखा और (मैं) *आप-* अवरोधन 2 है (ii) *एक्स* -अवरोधन है 4.

###### 1 3

समाधान (मैं) यहाँ, ढलान का रेखा है *एम* = टैन θ = 2 और *य* - अवरोधन *सी* = – 2 .

इसलिए, द्वारा ढलान अवरोधन रूप (3) ऊपर, समीकरण का रेखा है

*य* = 1 *एक्स* − 3

या 2 *य* − *एक्स* + 3 = 0 ,

###### 2 2

कौन है आवश्यक समीकरण.

###### 1

(ii) यहाँ, हम पास होना *एम* = टैन θ = 2 और *डी* = 4.

इसलिए, द्वारा ढलान अवरोधन रूप (4) ऊपर, समीकरण का रेखा है

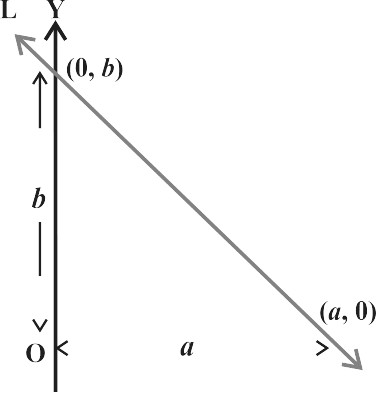
*य* = 1 ( *एक्स* − 4) या 2 *य* − *एक्स* + 4 = 0 ,

###### 2

कौन है आवश्यक समीकरण.

सीधा पंक्तियाँ 163

* + 1. *अवरोधन - रूप* मान लीजिए कि एक रेखा L पर *x-* अवरोधन *a* और *y-* अवरोधन *b बनाती है* कुल्हाड़ियाँ ज़ाहिर तौर से एल की बैठक *एक्स* -अक्ष पर बिंदु



( *ए* , 0) और *y* -अक्ष पर बिंदु (0, *बी* ) (अंजीर .9.13). द्वारा दो प्वाइंट रूप का समीकरण का रेखा, हम पास होना

*य* − 0 = *बी*  0 ( *एक्स* − *ए* ) या

*एय* = − *बीएक्स* + *अब* ,

0 − *ए*

अर्थात,

*एक्स* + *य* = 1 .

बी

इस प्रकार, समीकरण का रेखा निर्माण अवरोध

*ए* और *बी* पर *एक्स-* और *y* -अक्ष, क्रमश, है

*एक्स* + *य* = 1

*बी*

अंजीर 9.13

... (5)

उदाहरण 8 खोजो समीकरण का रेखा, कौन बनाता है अवरोध -3 और 2 पर

1. और *y* -कुल्हाड़ियाँ क्रमश।

समाधान यहाँ *ए* = -3 और *बी* = 2. द्वारा अवरोधन रूप (5) ऊपर, समीकरण का रेखा है

*एक्स* + *य* = 1 या 2 *एक्स* − 3 *साल* + 6 = 0 .

− 3 2

कोई समीकरण का रूप एक *एक्स +* द्वारा *\_ +* सी *=* 0, कहाँ ए और बी हैं नहीं शून्य इसके साथ ही है बुलाया *सामान्य रेखीय समीकरण* या *सामान्य समीकरण का ए रेखा* ।

EXERCISE 9.2

में अभ्यास 1 को 8, खोजो समीकरण का रेखा कौन संतुष्ट दिया गया स्थितियाँ:

* 1. लिखना समीकरण के लिए *एक्स* -और *y* -कुल्हाड़ियाँ।

###### 1

* 1. पासिंग के माध्यम से बिंदु (- 4, 3) साथ ढलान 2 .
  2. पासिंग के माध्यम से (0, 0) साथ ढलान *एम* ।
  3. पासिन जी के माध्यम से ( 2 , 2 3 ) और इच्छुक साथ \_ *एक्स* -अक्ष पर एक कोण का 7 5 ओ .
  4. पारस्परिक *एक्स* -अक्ष पर ए दूरी का 3 इकाइयां को बाएं का मूल साथ ढलान -2.
  5. पारस्परिक *y* -अक्ष पर ए दूरी का 2 इकाइयां ऊपर मूल और निर्माण एक कोण का 30 बजे साथ सकारात्मक दिशा का *एक्स* -अक्ष.

164 गणित

* 1. पासिंग के माध्यम से अंक (-1, 1) और (2, – 4).
  2. कोने का ∆ पीक्यूआर हैं पी (2, 1), क्यू (-2, 3) और आर (4, 5). खोजो समीकरण का MEDIAN के माध्यम से शिखर आर।
  3. खोजो समीकरण का रेखा पासिंग के माध्यम से (-3, 5) और सीधा को रेखा के माध्यम से अंक (2, 5) और (-3, 6).
  4. ए रेखा सीधा को रेखा खंड में शामिल होने अंक (1, 0) और (2, 3) विभाजित यह में अनुपात 1: *एन* । खोजो समीकरण का रेखा।
  5. खोजो समीकरण का ए रेखा वह कटौती बंद बराबर अवरोध पर कोआर्डिनेट कुल्हाड़ियों और गुजरता के माध्यम से बिंदु (2, 3).
  6. खोजो समीकरण का रेखा पासिंग के माध्यम से बिंदु (2, 2) और काट रहा है बंद अवरोध पर कुल्हाड़ियों किसका जोड़ है 9.
  7. खोजो रेखा का समीकरण बिंदु के माध्यम से (0, 2) एक कोण बनाना

2

3 साथ

सकारात्मक *एक्स* -अक्ष. भी, खोजो समीकरण का रेखा समानांतर को यह और क्रॉसिंग *y* -अक्ष पर ए दूरी का 2 इकाइयां नीचे मूल।

* 1. सीधा से मूल को ए रेखा की बैठक यह पर बिंदु (-2, 9), खोजो समीकरण का रेखा।
  2. तांबे की छड़ की लंबाई L (सेंटीमीटर में) उसके सेल्सियस का एक रैखिक फलन है तापमान सी. एक प्रयोग में, यदि L = 124.942 है जब C = 20 और L = 125.134 है जब सी = 110, एक्सप्रेस एल में शर्तें का सी।
  3. एक दूध की दुकान के मालिक को पता चलता है कि, वह प्रत्येक सप्ताह 980 लीटर दूध बेच सकता है 14 रुपये प्रति लीटर और हर हफ्ते 1220 लीटर दूध 16 रुपये प्रति लीटर। एक रेखीय मानकर विक्रय मूल्य और मांग के बीच संबंध, वह कितने लीटर बेच सकता है साप्ताहिक पर रुपये 17/लीटर?
  4. पी ( *ए* , *बी* ) है का मध्य बिंदु एक पंक्ति बीच का खंड कुल्हाड़ियाँ दिखाओ वह समीकरण

का रेखा है

*एक्स* + *य* = 2 .

बी

* 1. बिंदु R ( *h* , *k* ) अक्षों के बीच एक रेखाखंड को 1: 2 के अनुपात में विभाजित करता है। खोजो समीकरण का रेखा।
  2. द्वारा का उपयोग करते हुए अवधारणा का समीकरण का ए रेखा, सिद्ध करना वह तीन अंक (3, 0), (- 2, – 2) और (8,2) हैं संरेख.

#### दूरी का ए बिंदु से ए रेखा

एक रेखा से एक बिंदु की दूरी उस पर खींचे गए लम्ब की लंबाई होती है बिंदु को रेखा। होने देना एल : एक *एक्स* + द्वारा + सी *=* 0 होना ए रेखा, किसका दूरी से बिंदु पी ( *एक्स* 1 , *य* 1 ) है *डी।* खींचना ए सीधा बजे से बिंदु पी को रेखा एल (अंजीर 9.14). अगर

सीधा पंक्तियाँ 165

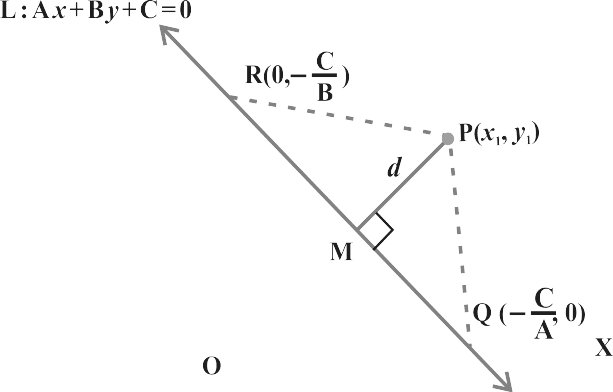


Fig 9.14

रेखा की बैठक *एक्स-* और *y-* अक्ष पर अंक क्यू और आर, क्रमश। तब, COORDINATES का

अंक क्यू हैं  − सी *,* 0  और आर  0 *,* − सी  . इस प्रकार, क्षेत्र का त्रिकोण पीक्यू आर है

 ए   बी 

दिया गया द्वारा

   

क्षेत्र ( ∆ PQR) = 1 पीएम.क्यूआर , कौन देता है बजे = 2 क्षेत्र (∆PQR)

... (1)

2

1

2

भी, क्षेत्र (∆PQR) =

QR

*एक्स*  0 + सी  +  − सी  − सी − *वाई*  + 0 ( *य*

– 0 )

1  बी   ए  बी 1  1

    

= *एक्स* सी + *य* सी +

1

2

C2

AB

1 बी 1 ए

या 2 क्षेत्र (∆PQR) = *.* एक *एक्स*

C

AB

+ बी *य* + सी *,*

और

 सी  2 ( सी

A

11 \_

) 2 सी

A2 + B2

QR =

 0 +  +

 

– 0 =

बी एबी

स्थानापन्न मान का क्षेत्र ( ∆ PQR) और QR में (1), हम पाना

A*x*1 + B *y*1 + C

A2 + B2

बजे =

166 गणित

या *डी* = .

A*x*1 + B *y*1 + C

A2 + B2

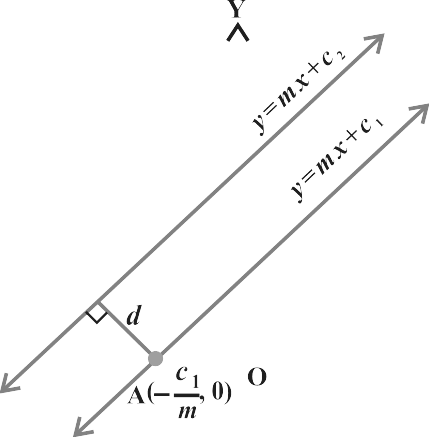
इस प्रकार, सीधा दूरी ( *डी* ) का ए रेखा ए *एक्स +* बी *वाई+* सी *=* 0 से ए बिंदु ( *एक्स* 1 , *य* 1 ) है दिया गया द्वारा

A*x*1 + B *y*1 + C

A2 + B2

*डी* = .

* + 1. *दूरी बीच में दो समानांतर पंक्तियां* हम जानना वह ढलानों का दो समानांतर पंक्तियां हैं बराबर। अत: दो समानान्तर रेखाएँ हो सकती हैं लिया में रूप



*य* = *एमएक्स* + *सी* 1  ... (1)

और *य* = *एमएक्स* + *सी* 2 ... (2) रेखा (1) इच्छा इंटरसेक्ट *एक्स-* अक्ष पर बिंदु

 − *सी* 1 *,* 0 

ए  *एम*   जैसा दिखाया में अंजीर 9.15.

  चित्र 9.15

दूरी बीच में दो पंक्तियां है बराबर को लंबाई का सीधा से बिंदु ए को रेखा (2). इसलिए, दूरी बीच में पंक्तियां (1) और (2) है

( − *म* )  − *सी* 1  + ( - *सी* )

 *एम*  2 − *सी*

 

1+

2

या *डी* = 1 2 .

1+ \_ *एम2* \_

इस प्रकार, दूरी *डी* बीच में दो समानांतर पंक्तियां *य* = *एमएक्स* + *सी* 1 और *य* = *एमएक्स* + *सी* 2 है दिया गया द्वारा

*डी* = .

1 − *c*2

1 +

2

अगर पंक्तियाँ हैं सामान्य रूप से दिया गया रूप, यानी, एक *एक्स* + द्वारा *\_* + सी 1 = 0 और एक *एक्स* + द्वारा *\_* + सी 2 = 0,

C1 − C2

A2 + B2

*डी* =

तब ऊपर FORMULA इच्छा लेना रूप छात्र कर सकना निकाले जाते हैं यह खुद।

सीधा पंक्तियाँ 167

उदाहरण 9 खोजो दूरी का बिंदु (3, – 5) से रेखा 3 *एक्स* – 4 *साल* -26 = 0.

समाधान दिया गया रेखा 3x है *\_* – 4 *साल* -26 = 0 ... (1) की तुलना (1) साथ सामान्य समीकरण का रेखा एक *एक्स* + द्वारा *\_* + सी = 0, हम पाना

ए = 3, बी = – 4 और सी = – 26.

दिया गया बिंदु है ( *एक्स* 1 , *य* 1 ) = (3, –5). दूरी का दिया गया बिंदु से दिया गया रेखा है

3*.*3 + (*–*4)(*–*5) *–* 26

32 + (*–*4)2

3

A*x*1 + B*y*1 + C

A2 + B2

*डी*  = = . 5

उदाहरण 10 खोजो दूरी बीच में समानांतर पंक्तियां 3 *एक्स* – 4 *साल* +7 = 0 और

3 *एक्स* – 4 *साल* + 5 = 0

समाधान यहाँ ए = 3, बी = -4, सी 1 = 7 और सी 2 = 5. इसलिए, आवश्यक दूरी है

*डी*  = 2 .

7 *–* 5

32 + (*–*4)2

5

EXERCISE 9.3

* + - 1. कम करना अगले समीकरण में ढलान - अवरोधन रूप और खोजो उनका ढलानों और य - अवरोधन।

(मैं) *एक्स* + 7 *y* = 0, (ii) 6x *\_* + 3 *वर्ष* – 5 = 0, (iii) *y* = 0.

* + - 1. कम करना अगले समीकरण में अवरोधन रूप और खोजो उनका अवरोध पर कुल्हाड़ियाँ

(मैं) 3 *एक्स* + 2 *य* – 12 = 0, (ii) 4 *एक्स* – 3 *साल* = 6, (iii) 3 *वर्ष* + 2 = 0.

* + - 1. खोजो दूरी का बिंदु (-1, 1) से रेखा 12( *एक्स* + 6) = 5( *य* – 2).
      2. खोजो अंक पर *एक्स* -अक्ष, किसका दूरी से रेखा
      3. खोजो दूरी बीच में समानांतर पंक्तियां

*एक्स* + *य* = 1 हैं 4 इकाइयाँ।

3 4

(मैं) 15 *एक्स* + 8 *साल* – 34 = 0 और 15 *एक्स* + 8 *साल* + 31 = 0 (ii) *एल* ( *एक्स* + *य* ) + *पी* = 0 और *एल* ( *एक्स* + *य* ) – *आर* = 0.

* + - 1. खोजो समीकरण का रेखा समानांतर को रेखा 3 *एक्स*

बिंदु (-2, 3).

4 *य* + 2 = 0

और पासिंग के माध्यम से

* + - 1. खोजो समीकरण का रेखा सीधा को रेखा *एक्स* – 7 *साल* + 5 = 0 और होना

*एक्स* अवरोधन 3.

* + - 1. खोजो एंगल्स बीच में पंक्तियां

3 *एक्स* + *य* = 1और *एक्स* +

3 *य* = 1.

* + - 1. रेखा के माध्यम से अंक ( *एच* , 3) और (4, 1) काटती है रेखा 7

पर सही कोण। खोजो कीमत का *एच* ।

– 9 *य* − 19 = 0 *.*

168 गणित

* + - 1. सिद्ध करना वह रेखा के माध्यम से बिंदु ( *एक्स* 1 , *य* 1 ) और समानांतर को रेखा एक *एक्स +* द्वारा *\_ +* सी = 0 है ए ( *एक्स –x* 1 ) *+* बी ( *य – य* 1 ) = 0.
      2. दो पंक्तियां पासिंग के माध्यम से बिंदु (2, 3) काटती है प्रत्येक अन्य पर एक कोण का 60 ओ . अगर ढलान का एक रेखा है 2, खोजो समीकरण का अन्य रेखा।
      3. खोजो समीकरण का सही द्विभाजक का रेखा खंड में शामिल होने अंक (3, 4) और ( *-1* , 2).
      4. खोजो COORDINATES का पैर का सीधा से बिंदु ( *-1* , 3) को रेखा 3 *एक्स* - 4 *साल* - 16 = 0.
      5. सीधा से मूल को रेखा *य = एमएक्स + सी* की बैठक यह पर बिंदु ( *-1* , 2). खोजो *एम* का मानऔर *सी* ।
      6. अगर *पी* और *क्यू* हैं लंबाई का लंबवत से मूल को

लाइनें *एक्स* cosθ

*य* पाप θ

*क* क्योंकि 2θ और *एक्स* सेकंड θ + *य* कोसेक θ = *क* , क्रमश, सिद्ध करना

वह *पी* 2 + 4 *प्रश्न* 2 = *क* 2 .

* + - 1. में त्रिकोण एबीसी साथ कोने ए (2, 3), बी (4, *–* 1) और सी (1, 2), खोजो समीकरण और लंबाई का ऊंचाई से शिखर एक।
      2. अगर *पी* है लंबाई का सीधा से मूल को रेखा किसका अवरोध पर

कुल्हाड़ियों हैं *ए* और *बी* , तब दिखाओ वह

#### 1 = 1

*पी* 2 *ए* 2

#### + 1 .

*बी* 2

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 11 अगर पंक्तियां 2 *एक्स* + *य* − 3 = 0 *,*

समवर्ती, खोजो कीमत के . *\_*

5 *एक्स* + *ky* − 3 = 0

और 3 *एक्स*  *वाई* − 2 = 0 हैं

समाधान तीन पंक्तियां हैं कहा को होना समवर्ती, अगर वे उत्तीर्ण के माध्यम से ए सामान्य बिंदु, अर्थात, बिंदु का चौराहा का कोई दो पंक्तियां झूठ पर तीसरा रेखा। यहाँ दिया गया पंक्तियां हैं

2x *\_* + *य* - 3 = 0 ... (1)

5x *\_* + *ky* - 3 = 0 ... (2)

3 *एक्स* – *य* – 2 = 0 ... (3)

हल (1) और (3) द्वारा क्रॉस-गुणा तरीका, हम पाना

*एक्स*  *वाई*  = 1

या *एक्स* = 1

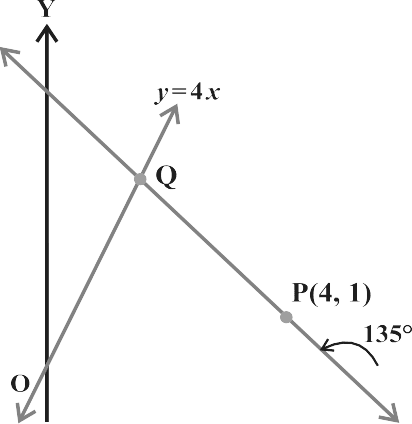
*और* = 1 .

###### -2 – 3-9 \_ + 4 –2 – 3

इसलिए, बिंदु का चौराहा का दो पंक्तियां है (1, 1). तब से ऊपर तीन पंक्तियां हैं समवर्ती, बिंदु (1, 1) इच्छा संतुष्ट समीकरण (2) इसलिए वह

5.1 + *क* .1 – 3 = 0 या *क* = – 2.

सीधा पंक्तियाँ 169

उदाहरण 12 खोजो दूरी का रेखा 4 *एक्स – य =* 0 से बिंदु पी (4, 1) मापा साथ में रेखा निर्माण एक कोण का 135° साथ सकारात्मक *एक्स-* अक्ष.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| समाधान दिया गया रेखा है 4 *एक्स – य =* 0 में आदेश को खोजो दूरी का रेखा (1) से बिंदु पी (4, 1) साथ में एक और रेखा, हम पास होना को खोजो बिंदु |  | ... (1) |
| का चौराहा का दोनों पंक्तियाँ. के लिए  इस उद्देश्य को हम सबसे पहले खोजेंगे समीकरण का दूसरी पंक्ति (चित्र 9.16)। दूसरी पंक्ति का ढलान है tan 135° = *–* 1. रेखा का समीकरण साथ ढलान – 1 के माध्यम से बिंदु पी (4, 1) है | (1, 4) |  |
|  | अंजीर 9.16 |  |
| *य* – 1 = – 1 ( *एक्स* – 4) या *एक्स* + *य* – 5 = 0 |  | ... (2) |

हल (1) और (2), हम पाना *एक्स* = 1 और *य* = 4 इसलिए वह बिंदु का चौराहा का दो पंक्तियां है क्यू (1, 4). अब, दूरी का रेखा (1) से बिंदु पी (4, 1) साथ में रेखा (2)



= दूरी बीच में अंक पी (4, 1) और क्यू (1, 4).

== \_ 3

(1− 4)2 + (4 −1)2



2

इकाइयां *.*

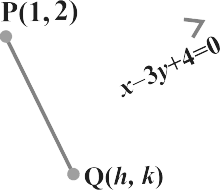
उदाहरण 13 यह मानते हुए कि सीधी रेखाएँ एक बिंदु के लिए समतल दर्पण के रूप में कार्य करती हैं, ज्ञात कीजिए छवि का बिंदु (1, 2) में रेखा *एक्स -* 3 *y +* 4 = 0.

समाधान होने देना क्यू ( *एच* , *क* ) है छवि का बिंदु पी (1, 2) में रेखा

*एक्स* – 3 *साल* + 4 = 0 ... (1)

इसलिए, रेखा (1) है सीधा द्विभाजक का रेखा खंड पी क्यू (अंजीर 9.17).

अंजीर 9.17



170 गणित

इस तरह ढलान का रेखा पी क्यू = ढलान का रेखा

1

*एक्स* − 3 *साल* + 4 = 0 ,

इसलिए वह *क*  2

− 1 आर 3 *घंटे* + *क* = 5

... (2)

*एच* − 1 1

3

 *एच* + 1 , *क* + 2 

और मध्य-बिंदु का पी क्यू, अर्थात, बिंदु 

#### 2 \_

 इच्छा संतुष्ट समीकरण (1) इसलिए वह

#### 2 \_

*एच* + 1 − 3 \_ *क* + 2  + 4 = 0 या *एच* − 3 *कि* = −3 \_

#### ... (3)

 

#### 2  2 

###### 6 7

हल (2) और (3), हम पाना *एच* = 5 और *क* = 5 .



इस तरह, की छवि बिंदु (1,2) में पंक्ति (1) है  6 *,* 7  .

 5 5 

उदाहरण 14 दिखाओ वह क्षेत्र का त्रिकोण बनाया द्वारा पंक्तियां

*य* = *एम* 1 *एक्स* + *सी* 1 , *य* = *एम* 2 *एक्स* + *सी* 2 और *एक्स* = 0 है

समाधान दिया गया पंक्तियां हैं



*य* = *मी* 1 *एक्स* + *सी* 1  ... (1)

*य* = *मी* 2 *एक्स* + *सी* 2 ... (2)

*एक्स* = 0 ... (3)

हम जानते हैं कि रेखा *y = mx + c* मिलती है रेखा *एक्स* = 0 ( *y-* अक्ष) पर बिंदु

(0, *सी* ). इसलिए, के दो शीर्ष त्रिकोण बनाया द्वारा पंक्तियां (1) को (3) हैं पी (0, *सी* 1 ) और क्यू (0, *सी* 2 ) (अंजीर 9.18).

तीसरा शिखर कर सकना होना प्राप्त किया द्वारा सुलझाने समीकरण (1) और (2). हल (1) और

1. , हम पाना

( *सी* 1

*सी* 2 ) 2

.

2 1 − *m*2

अंजीर 9.18

*एक्स* = ( *सी* 2 − *सी* 1 ) ( *एम* 1 − *एम* 2 )

और *य* = ( *एम* 1 *सी* 2 − *एम* 2 *सी* 1 )

( *एम* 1 − *मी* 2 )

सीधा पंक्तियाँ 171

 ( 2 − *सी* 1 ) ( *m1c2* \_ *\_* \_ − *एम2* \_ *सी* 1 ) 

इसलिए, तीसरा शिखर का त्रिकोण है आर

( *एम* − *एम* ) *,*  ( *एम* − *एम* )  .

 1 2 1 2 

अब, क्षेत्र का त्रिकोण है

= 0  *एम* 1 *सी* 2 − *एम* 2 *सी* 1 − *सी*  +

1

2



2

*सी* 2 − *सी* 1 ( *सी*

– *सी* ) + 0

 − 

*सी* − 1 2 2 1 =

*m c* *m c*

( *सी* 1 ) 2

 *एम* 1 − *मी* 2

2  2 1

 *एम* 1 *एम* 2

−

 1 

 *म* 1 *म* 2 

−

2 1 − *मी* 2

उदाहरण 15 ए रेखा है ऐसा वह इसका खंड बीच में पंक्तियां



5 *एक्स* – *य* + 4 = 0 और 3 *एक्स* + 4 *साल* – 4 = 0 है विभाजित पर बिंदु (1, 5). प्राप्त इसका समीकरण.

समाधान दिया गया पंक्तियां हैं

5 *एक्स* – *य* + 4 = 0 ... (1)

3 *एक्स* + 4 *साल* – 4 = 0 ... (2)

होने देना आवश्यक रेखा काटती है पंक्तियां (1) और

(2) पर अंक, ( α 1 , β 1 ) तथा ( α 2 , β 2 ), क्रमश: (चित्र 9.19)। इसलिए

5 α 1 – β 1 + 4 = 0 और 3 α 2+ \_ 4 β 2 – 4 = 0

या β 1

= 5 α 1 + 4 और β 2

= 4 – 3 α 2 .

4

अंजीर 9.19

हम हैं दिया गया वह मध्य बिंदु का खंड का

आवश्यक रेखा बीच में ( α , β ) और ( α , β ) है (1, 5). इसलिए

1 1 2 2

ए'1 \_ + ए'2 \_

###### 1 और

बी 1 + बी 2 = 5 ,

2 2

#### 5ए + 4 + 4 – 3 ए 2

या α 1 + α 2

1

#### = 2 और

4 = 5,

#### 2

या α 1 + α 2 = 2 और 20 α 1 – 3 α 2 = 20 ... (3) हल समीकरण में (3) के लिए α 1 और α 2 , हम पाना

172 गणित

ए = 26

और ए

= 20 और इस तरह, बी

###### = 5. 26 + 4 = 222 .

1 23

2 23

###### 1 23 23

समीकरण का आवश्यक रेखा पासिंग के माध्यम से (1, 5) और ( α , β ) है

1 1

#### β − 5

222 − 5

*य* − 5 = 1  ( *एक्स* - 1) या *य*

α 1 − 1

या 107 *एक्स* – 3 *वर्ष* - 92 = 0,

कौन है समीकरण का आवश्यक रेखा।

5 = 23 ( *एक्स* - 1)

26 − 1

23

उदाहरण 16 दिखाओ वह पथ का ए चलती बिंदु ऐसा वह इसका दूरी से दो पंक्तियां 3 *एक्स* – 2 *साल* = 5 और 3 *एक्स* + 2 *वर्ष* = 5 हैं बराबर है ए सीधा रेखा।

समाधान दिया गया पंक्तियां हैं

3 *एक्स* – 2 *य* = 5 … (1)

और 3 *एक्स* + 2 *य* = 5 … (2)

होने देना ( *एच, क* ) है कोई बिंदु, किसका दूरी से पंक्तियां (1) और (2) हैं बराबर। इसलिए

#### = या

3*h* − 2*k* − 5

9 + 4

3*h* + 2*k* − 5

9 + 4

3 *घंटे* − 2k *\_* − 5

= 3 *घंटे* + 2k *\_* − 5 ,

कौन देता है 3 *घंटे* – 2 *कि* – 5 = 3 *घंटे* + 2 *कि* – 5 या – (3 *घंटे* – 2 *कि* – 5) = 3 *घंटे* + 2 *कि* – 5.

###### 5

इनका समाधान कर रहे हैं दो रिश्ते हमें *k मिलता है* = 0 या *एच* = 3 . इस प्रकार, बिंदु ( *एच* , *क* ) संतुष्ट

###### 5

समीकरण *य* = 0 या *एक्स* = 3 , कौन प्रतिनिधित्व करना सीधा पंक्तियाँ. इस तरह, पथ का बिंदु

समान दूरी से पंक्तियां (1) और (2) है ए सीधा रेखा।

*मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 9*

1. खोजो मान का *क* के लिए कौन रेखा ( *क–* 3) *एक्स –* (4 *– के* 2 ) *य* + *क* 2 -7 *कि* + 6 = 0 है
   1. समानांतर को *एक्स* -अक्ष,
   2. समानांतर को *y* -अक्ष,
   3. पासिंग के माध्यम से मूल।
2. खोजो समीकरण की पंक्तियाँ, कौन काट दिया पर अवरोधन कुल्हाड़ियों किसका योग और उत्पाद हैं 1 और – 6, क्रमश।

सीधा पंक्तियाँ 173

1. क्या हैं अंक पर *y* -अक्ष किसका दूरी से रेखा 4 इकाइयाँ।

*x*  *y* = 1 है

3 4

1. खोजो सीधा दूरी से मूल को रेखा में शामिल होने अंक (क्योंकि θ , पाप θ ) और (क्योंकि) φ , पाप φ ).
2. खोजो समीकरण का रेखा समानांतर को *y* -अक्ष और अनिर्णित के माध्यम से बिंदु का

चौराहा का पंक्तियां *एक्स –* 7 *साल* + 5 = 0 और 3 *एक्स* + *य* = 0.

*x*  *y*

1. खोजो समीकरण का ए रेखा अनिर्णित सीधा को पंक्ति + = 1 के माध्यम से

###### 4 6

बिंदु, कहाँ यह की बैठक *y* -अक्ष.

1. खोजो क्षेत्र का त्रिकोण बनाया द्वारा पंक्तियां *य – एक्स =* 0, *एक्स + य =* 0 और *एक्स – क =* 0.
2. खोजो कीमत का *पी* इसलिए वह तीन पंक्तियां 3 *एक्स + य –* 2 *=* 0, *पिक्सल +* 2 *य –* 3 *=* 0 और 2 *एक्स – य –* 3 *=* 0 मई इंटरसेक्ट पर एक बिंदु।
3. अगर तीन पंक्तियां किसका समीकरण हैं *य = एम* 1 *एक्स + सी* 1 , *य* = *एम* 2 *एक्स* + सी 2 और *य* = *एम* 3 *एक्स* + सी 3 हैं समवर्ती, तब दिखाओ वह *एम* 1 (सी 2 – सी 3 ) + *मी* 2 (सी 3 - सी 1 ) + *मी* 3 (सी 1 – सी 2 ) = 0.
4. खोजो समीकरण का पंक्तियां के माध्यम से बिंदु (3, 2) कौन बनाना एक कोण का 45 ओ साथ लाइन *एक्स –* 2 *य* = 3.
5. खोजो समीकरण का रेखा पासिंग के माध्यम से बिंदु का चौराहा का पंक्तियां 4 *एक्स* + 7 *साल* – 3 = 0 और 2 *एक्स* – 3 *साल* + 1 = 0 वह है बराबर अवरोध पर कुल्हाड़ियाँ
6. दिखाओ वह समीकरण का रेखा पासिंग के माध्यम से मूल और निर्माण एक कोण

θ साथ रेखा *य* = *एमएक्स* + *सी है य*

*x*

= *एम* ± टैन ‚ 1 ∓ *एम* टैन ‚

1. में क्या अनुपात, रेखा में शामिल होने ( *-1* , 1) और (5, 7) है अलग करना द्वारा रेखा *एक्स* + *य* = 4?

.

1. रेखा के अनुदिश बिंदु (1, 2) से रेखा 4 *x* + 7 *y + 5 = 0* की दूरी ज्ञात कीजिए 2 *एक्स* – *य =* 0 *.*
2. खोजो दिशा में कौन ए सीधा रेखा अवश्य होना अनिर्णित के माध्यम से बिंदु ( *-1* , 2) इसलिए वह इसका बिंदु का चौराहा साथ रेखा *एक्स* + *य* = 4 मई होना पर ए दूरी का 3 इकाइयां से यह बिंदु।
3. कर्ण का ए सही कोणीय त्रिकोण है इसका समाप्त होता है पर अंक (1, 3) और (- 4, 1). खोजो एक समीकरण का पैर (लंबवत पक्ष) का त्रिकोण कौन हैं समानांतर को कुल्हाड़ियाँ
4. खोजो छवि का बिंदु (3, 8) साथ आदर को रेखा *एक्स* +3 *वर्ष* = 7 मान लिया जाये रेखा को होना ए विमान आईना।
5. अगर पंक्तियां *य* = 3 *एक्स* +1 और 2 *य* = *एक्स* + 3 हैं समान रूप से इच्छुक को रेखा *य* = *एमएक्स* + 4, खोजो कीमत का *एम* ।
6. अगर जोड़ का सीधा दूरी का ए चर बिंदु पी ( *एक्स, य* ) से पंक्तियां

*एक्स* + *य –* 5 = 0 और 3 *एक्स –* 2 *य* +7 = 0 है हमेशा 10. दिखाओ वह पी अवश्य कदम पर ए रेखा।

174 गणित

1. खोजो समीकरण का रेखा कौन है समान दूरी से समानांतर पंक्तियां 9 *एक्स* + 6 *साल* – 7 = 0 और 3 *एक्स* + 2 *य* + 6 = 0.
2. ए रे का रोशनी पासिंग के माध्यम से बिंदु (1, 2) दर्शाता पर *एक्स* -अक्ष पर बिंदु ए और प्रतिबिंबित रे गुजरता के माध्यम से बिंदु (5, 3). खोजो COORDINATES का एक।
3. साबित करें कि का उत्पाद की लम्बाई लंबवत से खींचा

अंक (

2 − *बी* 2 *,* 0 ) और ( −

2 − *बी* 2 *,* 0 को रेखा *एक्स* ओल θ + *य* पाप θ = 1है *बी* 2 .

*ए*  *बी*

)

1. ए व्यक्ति खड़ा है पर संगम (पार करना) का दो सीधा के रास्ते का प्रतिनिधित्व किया द्वारा समीकरण 2 *एक्स* – 3 *साल* + 4 = 0 और 3 *एक्स* + 4 *साल* – 5 = 0 चाहता हे को पहुँचना पथ किसका न्यूनतम समय में समीकरण 6 *x* – 7 *y + 8 = 0 है।* उस पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए जो उसने किया है चाहिए अनुसरण करना।

*सारांश*

ढलान( *एम* ) का बिंदुओं से होकर गुजरने वाली एक गैर-ऊर्ध्वाधर रेखा ( *एक्स* 1 *, य* 1 ) और ( *एक्स* 2 *, य* 2 )

है दिया गया द्वारा *एम* = *य* 2

*य* 1 = *य* 1 − *य* 2

≠ *एक्स .*

*एक्स* − *एक्स*  *एक्स* − *x*  1  2

2 1 1 2

* अगर ए रेखा बनाता है एक कोण ए साथ सकारात्मक दिशा का *एक्स* -अक्ष, तब ढलान का रेखा है दिया गया द्वारा *एम* = टैन α , α ≠ 90°.

ढलान का क्षैतिज रेखा है शून्य और ढलान का खड़ा रेखा है अपरिभाषित.

* एक तीव्र कोण (कहना θ ) बीच में पंक्तियां एल 1 और एल 2 साथ ढलानों *मी* 1 और *मी* 2 है

दिया गया द्वारा

tanθ

*एम2* \_ *- एम1* \_

1 + *एम1* \_ *एम2* \_

*,* 1 + *एम1* \_ *एम2* \_

≠ 0 .

� दो पंक्तियां हैं *समानांतर* अगर और केवल अगर उनका ढलानों हैं बराबर।

� दो रेखाएँ *लंबवत हैं* यदि और केवल यदि का उत्पाद उनका ढलान -1 है।

� तीन अंक ए, बी और सी हैं संरेख, अगर और केवल अगर ढलान का अब = ढलान का ईसा पूर्व.

- समीकरण का क्षैतिज रेखा होना दूरी *ए* से *एक्स* -अक्ष है दोनों में से एक

*य* = *ए* या *य =* – *एक।*

- समीकरण का खड़ा रेखा होना दूरी *बी* से *y* -अक्ष है दोनों में से एक

*एक्स* = *बी* या *एक्स =* – *बी।*

बिंदु ( *x, y ) ढलान m* वाली रेखा पर और निश्चित बिंदु ( *x* o *, y* o ) से होकर जाता है। अगर और केवल अगर इसका COORDINATES संतुष्ट समीकरण *य* – *यो* \_ = *एम* ( *एक्स* – *एक्स* ओ ).

* समीकरण का रेखा पासिंग के माध्यम से अंक ( *एक्स* 1 *, य* 1 ) और ( *एक्स* 2 *, य* 2 ) है दिया गया द्वारा

*य* − *य*

= *य* 2 − *य* 1 ( *एक्स* − *एक्स* ).

*एक्स* 2 − *एक्स* 1

1

1

सीधा पंक्तियाँ 175

� द बिंदु ( *एक्स* , *य* ) पर ढलान के साथ रेखा *मी* और *y-* अवरोधन *सी* पर स्थित है रेखा अगर व केवल अगर *य* = *एमएक्स* + *सी* .

� अगर ए रेखा साथ ढलान *एम* बनाता है *एक्स-* अवरोधन *डी* । तब समीकरण का रेखा है

*य* = *एम* ( *एक्स* – *डी* )।

- समीकरण का ए रेखा निर्माण अवरोध *ए* और *बी* पर *एक्स-* और *y* -अक्ष,

क्रमश, है

*एक्स* + *य*

= 1 .

*ए*  *बी*

� कोई भी समीकरण का रूप एक *एक्स +* द्वारा *\_ +* सी *=* 0, साथ ए और बी हैं नहीं शून्य, इसके साथ ही, है बुलाया *सामान्य रेखीय समीकरण* या *सामान्य समीकरण का*

*ए रेखा* ।

� द सीधा दूरी ( *डी* ) का ए रेखा एक *एक्स +* बी *वाई+* सी *=* 0 से ए बिंदु ( *एक्स* 1 , *य* 1 )

है दिया गया द्वारा *डी* =

ए *एक्स* 1 + बी *य* 1 + सी . ए 2 + बी 2

दूरी बीच में समानांतर पंक्तियां एक *एक्स +* द्वारा *\_ +* सी 1 = 0 और एक *एक्स +* द्वारा *\_ +* सी 2 = 0,

है दिया गया द्वारा *डी* =

सी 1 − सी 2 .

ए 2 + बी 2

176 MATHEMATICS

## अध्याय 10

CONIC SECTIONS

चलो *रिश्ता का ज्ञान को असली ज़िंदगी होना बहुत दृश्यमान को आपका विद्यार्थियों और होने देना उन्हें समझना कैसे द्वारा ज्ञान दुनिया सकना होना परिवर्तित. – बर्ट्रेंड रसेल* �

#### परिचय

में के पिछले अध्याय 10, हम पास होना अध्ययन विभिन्न फार्म एक रेखा के समीकरणों का. इस अध्याय में हम अध्ययन करेंगे कुछ अन्य वक्रों, जैसे वृत्त, दीर्घवृत्त, परवलय के बारे में और अतिपरवलय. परवलय और अतिपरवलय नाम हैं अपोलोनियस द्वारा दिया गया। ये वक्र वास्तव में, के रूप में जाने जाते हैं *शांकव खंड* या अधिक सामान्यतः *शांकव* क्योंकि वे एक डबल के साथ एक विमान के चौराहे के रूप में प्राप्त किया जा सकता है झपकी ले ली सही परिपत्र शंकु. इन घटता पास होना ए बहुत चौड़ा ग्रहों की गति जैसे क्षेत्रों में अनुप्रयोगों की सीमा, डिज़ाइन का दूरबीन और एंटेना, रिफ्लेक्टर में टॉर्च

अपोलोनियस (262 ईसा पूर्व -190 बीसी)

और ऑटोमोबाइल हेडलाइट्स, आदि। अब, अगले अनुभागों में हम देखेंगे कि कैसे चौराहा का ए विमान साथ ए दोहरा झपकी ले ली सही परिपत्र कोन



विभिन्न प्रकार के वक्र उत्पन्न होते हैं।

#### धारा का ए कोन

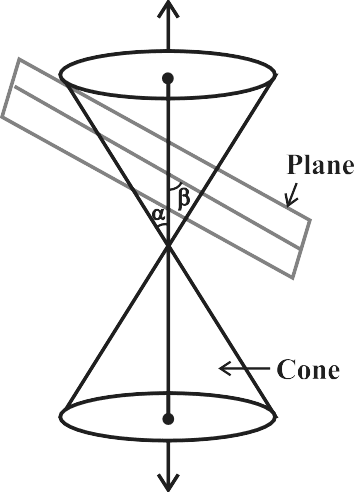
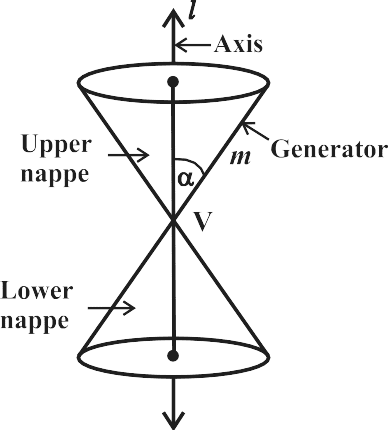
होने देना *एल* होना ए तय खड़ा रेखा और *एम* होना एक और रेखा अन्तर्विभाजक यह पर ए तय बिंदु वी और इच्छुक को यह पर एक कोण α (चित्र 10.1)।

कल्पना करना हम घुमाएँ रेखा *एम* आस-पास रेखा *एल* में ऐसा ए रास्ता

कि कोण α स्थिर रहता है। तब उत्पन्न सतह है ए डबल napped सही परिपत्र खोखला कोन इस के साथ साथ बाद निर्दिष्ट जैसा

अंजीर 10. 1

शांकव धारा 177



अंजीर 10. 2 अंजीर 10. 3

कोन और का विस्तार अनिश्चित काल के लिए दूर में दोनों दिशा-निर्देश (चित्र 10.2)।

बिंदु वी है बुलाया *शिखर* ; रेखा *एल* है *एक्सिस* का शंकु. घूर्णन रेखा *m को* शंकु का *जनक* कहा जाता है । शीर्ष *शंकु* को दो भागों में अलग करता है बुलाया *झपकी* .

अगर हम लेना चौराहा का ए विमान साथ ए शंकु, अनुभाग इसलिए प्राप्त किया है बुलाया एक *शंकुधारी खंड* . इस प्रकार, शंकुधारी खंड एक दायीं ओर प्रतिच्छेद करके प्राप्त किए गए वक्र हैं गोलाकार शंकु एक विमान द्वारा.

हमें स्थिति के आधार पर विभिन्न प्रकार के शंकु खंड प्राप्त होते हैं अन्तर्विभाजक विमान साथ आदर को कोन और द्वारा कोण बनाया द्वारा यह साथ खड़ा शंकु की धुरी. मान लीजिए कि ऊर्ध्वाधर के साथ प्रतिच्छेद करने वाले तल द्वारा बनाया गया कोण β है एक्सिस का कोन (चित्र 10.3)।

चौराहा का विमान साथ कोन कर सकना लेना जगह दोनों में से एक पर शिखर का कोन या पर कोई अन्य भाग का आवरण दोनों में से एक नीचे या ऊपर शिखर.

* + 1. *घेरा, दीर्घवृत्त, परवलय और अतिशयोक्ति* कब विमान कटौती आवरण (अन्य बजाय शीर्ष) का शंकु, हम पास होना अगले स्थितियाँ:

1. कब β = 90 ओ , अनुभाग है ए *घेरा* (चित्र 10.4)।
2. कब α < β <90 ओ , अनुभाग एक है *दीर्घवृत्त* (चित्र 10.5)।
3. कब β = α ; अनुभाग है ए *परवलय* (चित्र10.6)।

(में प्रत्येक का ऊपर तीन परिस्थितियाँ, विमान कटौती पूरी तरह से आर-पार एक आवरण का

शंकु).

1. कब 0 ≤ β < α ; विमान कटौती के माध्यम से दोनों झपकी और घटता का चौराहा है ए *अतिशयोक्ति* (चित्र10.7).

178 गणित



अंजीर 10. 4

अंजीर 10. 5



अंजीर 10. 6



* + 1. *विकृत शंकुधर धारा*

अंजीर 10. 7

कब विमान कटौती पर शिखर का शंकु, हम पास होना अगले अलग मामले:

1. कब α < β ≤ 90 ओ , तब अनुभाग है ए बिंदु (चित्र 10.8)।
2. कब β = α , विमान रोकना ए जनक का कोन और अनुभाग है ए सीधा रेखा (चित्र 10.9)।

यह है degenerated मामला का ए परवलय.

1. कब 0 ≤ β < α , अनुभाग है ए जोड़ा का अन्तर्विभाजक सीधा पंक्तियां (चित्र10.10)। यह है degenerated मामला का ए *अतिपरवलय* ।

शांकव धारा 179

में अगले अनुभाग, हम करेगा प्राप्त समीकरण का प्रत्येक का इन शंकुधर धारा में मानक रूप द्वारा परिभाषित उन्हें आधारित पर ज्यामितिक गुण।



अंजीर 10. 8



अंजीर 10. 9





#### घेरा

अंजीर 10. 10

परिभाषा 1 ए घेरा है तय करना का सभी अंक में ए विमान वह हैं समान दूरी से ए तय बिंदु में विमान।

तय बिंदु है बुलाया *केंद्र का घेरा* और दूरी से केंद्र को ए बिंदु पर घेरा है बुलाया *RADIUS* का घेरा (अंजीर 10.11).

180 गणित

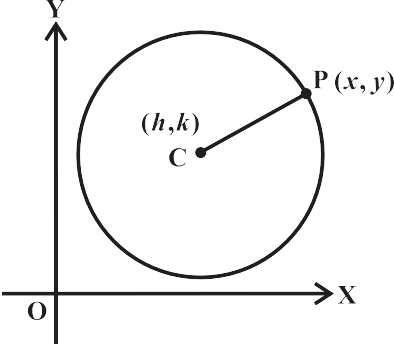
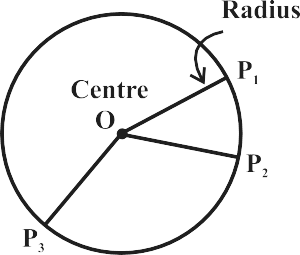


Fig 10. 12



अंजीर 10. 11

वृत्त का समीकरण सबसे सरल होता है यदि वृत्त का केंद्र मूल बिंदु पर हो। हालाँकि, हम नीचे दिए गए केंद्र और त्रिज्या वाले वृत्त का समीकरण प्राप्त करते हैं (अंजीर 10.12).

दिया गया सी ( *एच* , *क* ) होना केंद्र और *आर*  RADIUS का घेरा। होने देना पी( *एक्स* , *य* ) होना कोई बिंदु पर वृत्त (चित्र 10.12)। तब, परिभाषा के अनुसार, | सीपी | = *आर* . दूरी सूत्र द्वारा, हम पास होना

= *आर*

( *– h*)2 + (*y – k*)2

हाँ ( *एक्स* – *ज* ) 2 + ( *\_* – *क* ) 2 = *र* 2

यह है आवश्यक का समीकरण घेरा साथ केंद्र पर ( *एच* , *के* ) और RADIUS *आर* . उदाहरण 1 खोजो एक समीकरण का घेरा साथ केंद्र पर (0,0) और RADIUS *आर* । समाधान यहाँ *एच* = *क* = 0. इसलिए, समीकरण का घेरा है *एक्स* 2 + *य* 2 = *आर* 2 . उदाहरण 2 खोजो समीकरण का घेरा साथ केंद्र (-3, 2) और RADIUS 4.

समाधान यहाँ *एच* = -3, *क* = 2 और *आर* = 4. इसलिए, समीकरण का आवश्यक घेरा है ( *एक्स* + 3) 2 + ( *य* –2) 2 = 16

उदाहरण 3 खोजो केंद्र और RADIUS का घेरा *एक्स* 2 + *य* 2 + 8 *एक्स* + 10 *साल* – 8 = 0

समाधान दिया गया समीकरण है

( *एक्स* 2 + 8 *एक्स* ) + ( *य* 2 + 10 *वर्ष* ) = 8

अब, पूरा चौकों अंदर कोष्ठक, हम पाना

( *एक्स* 2+ \_ 8x *\_* + 16) + ( *y2* \_ + 10 *साल* + 25) = 8 + 16 + 25

हाँ ( *एक्स* + 4) 2 + ( *\_* + 5) 2 = 49

हाँ { *एक्स* – (- 4)} 2 + { *द* – (–5)} 2 = 7 2

इसलिए, दिया गया घेरा है केंद्र पर (- 4, –5) और RADIUS 7.

शांकव धारा 181

उदाहरण 4 खोजो समीकरण का घेरा कौन गुजरता के माध्यम से अंक (2, – 2), और (3,4) और किसका केंद्र झूठ पर रेखा *एक्स* + *वाई* = 2.

समाधान होने देना समीकरण का घेरा होना ( *एक्स* – *ज* ) 2 + ( *य* – *क* ) 2 = *आर* 2 .

तब से सर्कल गुजरता है के माध्यम से (2, – 2) और (3,4), हम पास होना (2 – *ज* ) 2 + (-2 – *क* ) 2 = *आर* 2  ... (1)

और (3 – *ज* ) 2 + (4 – *क* ) 2 = *आर* 2  ... (2)

भी तब से केंद्र झूठ है पर रेखा *x* + *y* = 2, हम पास होना

*एच* + *क* = 2 ... (3)

हल समीकरण (1), (2) और (3), हम पाना

*एच* = 0.7, *क* = 1.3 और *र* 2 = 12.58

इस तरह, समीकरण का आवश्यक घेरा है ( *एक्स* – 0.7) 2 + ( *य* – 1.3) 2 = 12.58.

EXERCISE 10.1

में प्रत्येक का अगले अभ्यास 1 को 5, खोजो समीकरण का घेरा साथ

1. केंद्र (0,2) और RADIUS 2 2. केंद्र (-2,3) और RADIUS 4

3. केंद्र ( 1 , 1 ) और RADIUS 1 4. केंद्र (1,1) और RADIUS

2

#### 2 4 12

5. केंद्र (- *ए* , - *बी* ) और त्रिज्या .

*a* 2

– *b*2

प्रत्येक में निम्नलिखित अभ्यास 6 से 9, खोजें केंद्र और वृत्तों की त्रिज्या.

6. ( *एक्स* + 5) 2 + ( *य* – 3) 2 = 36 7. *एक्स* 2 + *य* 2 – 4 *एक्स* – 8 *साल* – 45 = 0

8. *एक्स* 2 + *य* 2 – 8 *एक्स* + 10 *साल* – 12 = 0 9. 2 *x* 2 + 2 *य* 2 – *एक्स* = 0

1. खोजो समीकरण का घेरा पासिंग के माध्यम से अंक (4,1) और (6,5) और किसका केंद्र है पर रेखा 4 *एक्स* + *य* = 16.
2. खोजो समीकरण का घेरा पासिंग के माध्यम से अंक (2,3) और (-1,1) और किसका केंद्र है पर रेखा *एक्स* - 3 *साल* – 11 = 0.
3. खोजो समीकरण का घेरा साथ RADIUS 5 किसका केंद्र झूठ पर *एक्स* -अक्ष और गुजरता के माध्यम से बिंदु (2,3).
4. खोजो समीकरण का घेरा पासिंग के माध्यम से (0,0) और निर्माण अवरोध *ए* और

*बी* पर कोआर्डिनेट कुल्हाड़ियाँ

1. खोजो समीकरण का ए घेरा साथ केंद्र (2,2) और गुजरता के माध्यम से बिंदु (4,5).
2. करता है बिंदु (-2.5, 3.5) झूठ अंदर, बाहर या पर घेरा *एक्स* 2 + *य* 2 = 25?

182 गणित

#### परवलय

परिभाषा 2 ए परवलय है तय करना का सभी अंक में ए विमान वह हैं समान दूरी से ए तय रेखा और ए तय बिंदु (नहीं पर रेखा) में विमान।

स्थिर रेखा को नियता *कहते हैं* परवलय और तय बिंदु एफ है बुलाया *फोकस* (चित्र 10.13)। ('परा' का अर्थ है 'के लिए' और 'बोला' मतलब 'फेंकना', अर्थात, आकार बताया गया है कब आप फेंक ए गेंद में वायु)।

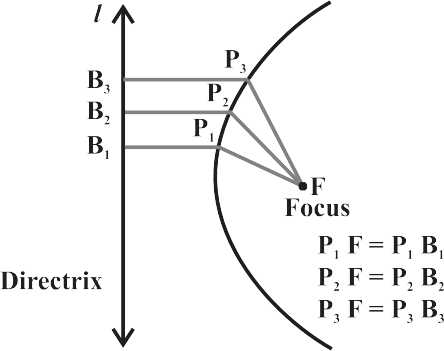
line, then the set of points in the plane, which are equidistant from the fixed point and the fixed line is the straight line through the fixed point and perpendicular to the fixed line. We call this straight line as *degenerate case* of the parabola.

�Note If the fixed point lies on the fixed

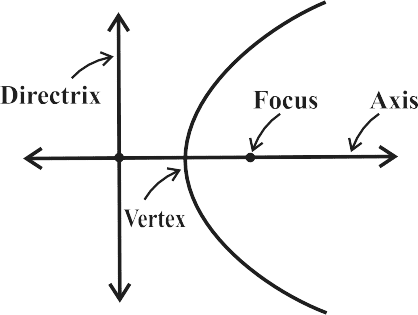
ए रेखा के माध्यम से केंद्र और सीधा को *नियता* है बुलाया *एक्सिस* का परवलय. बिंदु का चौराहा का परवलय साथ एक्सिस है बुलाया शिखर का परवलय (चित्र10.14)।

##### मानक समीकरण का परवलय

समीकरण का ए *परवलय* है सरल अगर



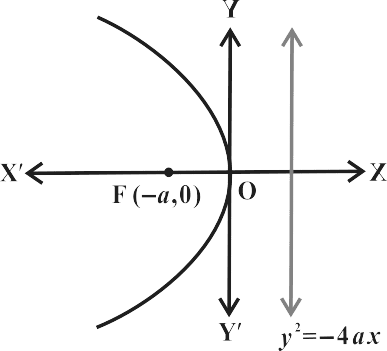
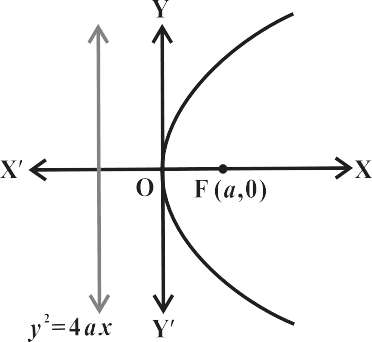
अंजीर 10. 13



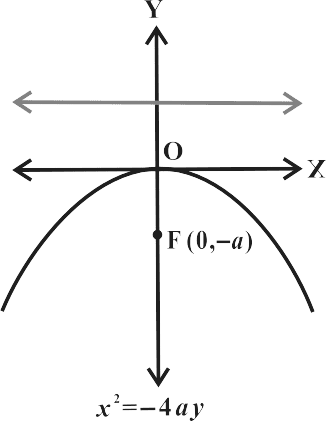
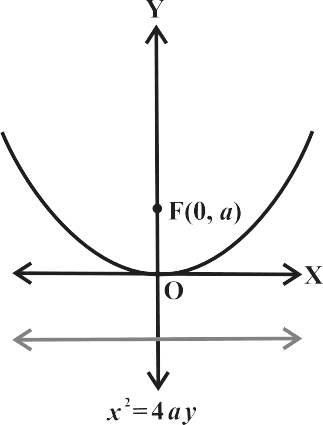
अंजीर 10.14

शिखर है पर मूल और एक्सिस का समरूपता है साथ में *एक्स* -अक्ष या *y* -अक्ष. चार संभव ऐसा झुकाव का परवलय हैं दिखाया नीचे में चित्र10.15 (ए) को (डी)।



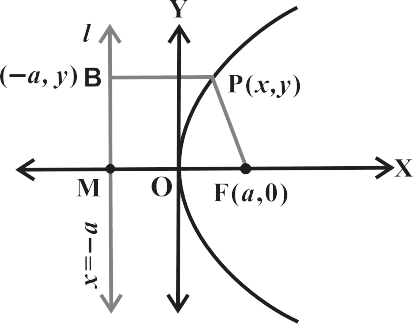


शांकव धारा 183



अंजीर 10.15 (ए) को (डी) 

हम इच्छा निकाले जाते हैं समीकरण के लिए परवलय दिखाया ऊपर में अंजीर 10.15 (ए) साथ

( *a* , 0) *a* > 0 पर *ध्यान केंद्रित करें ;* और डायरेक्ट्रिकएक्स *=* - *ए* नीचे के रूप में: होने देना एफ होना *केंद्र* और *एल*  *डायरेक्ट्रिक्स* । होने देना

*नियता* के लंबवत हो और समद्विभाजित हो बिंदु O पर एफएम. एमओ से एक्स का उत्पादन करें। से परवलय की परिभाषा में मध्यबिंदु O पर है परवलय और है बुलाया *शिखर* का परवलय. लेना हे जैसा मूल, बैल *x* -अक्ष और ओए सीधा को यह जैसा *y* -अक्ष. होने देना दूरी डायरेक्ट्रिक्स से फोकस तक 2 *ए हो* । फिर COORDINATES का फोकस *\_* हैं ( *ए* , 0), और समीकरण का *नियता* है *एक्स* + *ए* = 0 जैसा में चित्र10.16.

होने देना पी( *एक्स* , *य* ) होना कोई बिंदु पर परवलय ऐसा वह

अंजीर 10.16

पीएफ = पीबी, ... (1)

कहाँ पंजाब है सीधा को *एल* . COORDINATES का बी हैं (- *ए* , *य* ). द्वारा दूरी सूत्र, हम पास होना

( + *a*)2

पीएफ =

( *– a*)2 + *y*2

तब से पीएफ = पीबी, हम पास होना

=

( *– a*)2 + *y*2

(*x* + *a*)2

और पंजाब =

यानी ( *एक्स* – *ए* ) 2 + *य* 2 = ( *एक्स* + *ए* ) 2

या *x* 2 - 2 *कुल्हाड़ी* + *a2* \_ + *y2* \_ = *एक्स* 2 + 2 *कुल्हाड़ी* + *a2* \_

या *y* 2 = 4 *कुल्हाड़ी* ( *ए* > 0).

184 गणित

इस तरह, कोई बिंदु पर परवलय संतुष्ट

*य* 2 = 4 *कुल्हाड़ी*  (2)

इसके विपरीत, होने देना पी( *एक्स* , *य* ) संतुष्ट समीकरण (2)

पीएफ = =

( *– a*)2 + *y*2

( *– a*)2 + 4*ax*

=

( + *a*)2

और इसलिए पी( *एक्स* , *वाई* ) झूठ पर परवलय.

= पंजाब ... (3)

इस प्रकार, (2) और (3) से हमारे पास है साबित कर दिया कि समीकरण परवलय के साथ शिखर पर मूल, केंद्र पर ( *ए* ,0) और नियता *एक्स* = – *ए* है *य* 2 = 4 *कुल्हाड़ी* .

समीकरण (2) में चर्चा , चूँकि *a* > 0, *x* कोई भी सकारात्मक मान या शून्य मान सकता है कोई ऋणात्मक मान नहीं है और वक्र पहले और चौथे तक अनिश्चित काल तक फैला हुआ है चतुर्थांश. एक्सिस का परवलय है सकारात्मक *एक्स* -अक्ष.

इसी प्रकार, हम कर सकना निकाले जाते हैं समीकरण का परवलय *एस* में:

चित्र 11.15 (बी) *वाई* 2 के रूप में =-4 *कुल्हाड़ी* , चित्र 11.15 (सी) *x* 2 के रूप में = 4 *वर्ष* , चित्र 11.15 (डी) *x* 2 के रूप में =- 4 *अय* ,

इन चार समीकरण हैं ज्ञात जैसा *मानक समीकरण* का परवलय *एस.*

axis; vertex at the *origin* and thereby the directrix is parallel to the other coordinate axis. However, the study of the equations of parabolas with focus at any point and any line as directrix is beyond the scope here.

�Note The standard equations of parabolas have focus on one of the coordinate

परवलय के मानक समीकरण, चित्र 10.15 से, हमें निम्नलिखित मिलता है अवलोकन:

1. परवलय है सममित साथ आदर को एक्सिस का परवलय.यदि समीकरण एक *y* 2 है पद, तो सममिति का अक्ष *x-* अक्ष के अनुदिश है और यदि समीकरण है एक *एक्स* 2 अवधि, फिर एक्सिस समरूपता का है साथ *y* -अक्ष.
2. कब एक्सिस का समरूपता साथ है *एक्स* -अक्ष परवलय के लिए खुलता है
   1. सही अगर गुणक का *एक्स* है सकारात्मक,
   2. छोड़ दिया अगर का गुणांक *एक्स* है नकारात्मक।
3. कब एक्सिस का समरूपता है साथ में *y* -अक्ष परवलय खुलती
   1. ऊपर की ओर अगर गुणक का *य* है सकारात्मक।
   2. *y* का गुणांकनकारात्मक है.

शांकव धारा 185

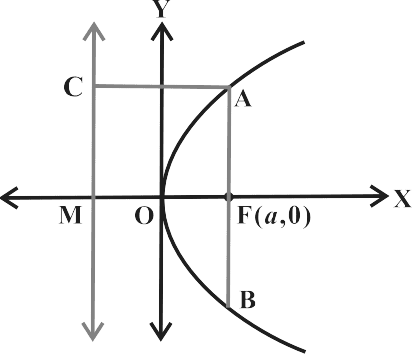
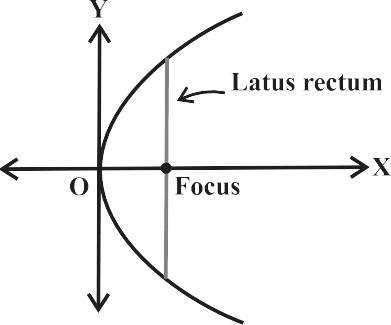
##### लैटस मलाशय

परिभाषा 3 लैटस मलाशय का ए परवलय है ए रेखा खंड सीधा को एक्सिस का परवलय, के माध्यम से केंद्र और किसका अंत अंक झूठ पर परवलय (चित्र10.17)।

को खोजो लंबाई का लैटस मलाशय की परवलय *य* 2 = 4 *कुल्हाड़ी* (अंजीर 10.18).

द्वारा परिभाषा का परवलय, ए एफ = एसी। लेकिन ए.सी = एफएम = 2 *ए*

इसलिए ए.एफ = 2 *ए* \_

*x-* अक्ष AF = FB इत्यादि के संबंध में सममित है अब = लंबाई का लैटस मलाशय = 4 *ए* .

अंजीर 10.17 चित्र 10.18

उदाहरण 5 खोजो COORDINATES का केंद्र, एक्सिस, डायरेक्ट्रिक्स और लैटस रेक्टम का समीकरण परवलय *य* 2 = 8 *एक्स* .

हल दिए गए समीकरण में *y* 2 शामिल है , इसलिए एक्सिस का समरूपता है साथ में *एक्स* -अक्ष.

गुणक का *एक्स* है सकारात्मक इसलिए परवलय खुलती दांई ओर। दिए गए समीकरण से तुलना करना *य* 2 = 4 *कुल्हाड़ी* , हम खोजो वह *ए* = 2.

अंजीर 10.19



इस प्रकार, केंद्र का परवलय है (2, 0) और समीकरण का नियता का परवलय है *एक्स* = – 2 (अंजीर 10.19).

लंबाई की लैटस मलाशय है 4 *ए* = 4 × 2 = 8.

186 गणित

उदाहरण 6 खोजो समीकरण का परवलय साथ केंद्र (2,0) और नियता *एक्स* = – 2.

हल चूंकि फोकस (2,0) पर है *x-* अक्ष, *x-* अक्ष ही इसकी धुरी है परवलय. इस तरह समीकरण का परवलय है का रूप दोनों में से एक *य* 2 = 4 *कुल्हाड़ी* या *य* 2 = – 4 *कुल्हाड़ी* . तब से नियता है *एक्स* = – 2 और केंद्र है (2,0), परवलय है को होना का रूप *य* 2 = 4 *कुल्हाड़ी* साथ *ए* = 2. इस तरह आव श्यक समीकरण है

*य* 2 = 4(2) *एक्स* = 8 *एक्स*

उदाहरण 7 खोजो समीकरण का परवलय साथ शिखर पर (0, 0) और केंद्र पर (0, 2).

समाधान चूँकि शीर्ष (0,0) पर है और फोकस (0,2) पर है जो *y-* अक्ष पर स्थित है, इसलिए *y-* अक्ष परवलय का अक्ष है *।* अत: परवलय का समीकरण इस प्रकार का होता है *एक्स* 2 = 4 *अय* . इस प्रकार, हम पास होना

*एक्स* 2 = 4(2) *य* , अर्थात, *एक्स* 2 = 8 *साल*

उदाहरण 8 खोजो समीकरण का परवलय कौन है सममित के बारे में *y* -अक्ष, और गुजरता के माध्यम से बिंदु (2,-3).

समाधान तब से परवलय है सममित के बारे में *y* -अक्ष और है इसका शिखर पर मूल, समीकरण *x* 2 = 4 *ay* या *x* 2 = - 4 *ay के रूप का है* , जहां चिह्न इस पर निर्भर करता है कि क्या परवलय ऊपर या नीचे की ओर खुलता है। लेकिन परवलय (2,-3) से होकर गुजरता है जो चौथे चतुर्थांश में स्थित है, उसे नीचे की ओर खुलना चाहिए। इस प्रकार समीकरण है रूप *एक्स* 2 = – 4 *अय* .

तब से परवलय गुजरता के माध्यम से ( 2,–3), हम पास होना

1

2 2 = – 4 *ए* (-3), अर्थात, *ए* = 3

इसलिए, समीकरण का परवलय है

*एक्स* 2 =

– 4 \_ 1  *हाँ* , अर्थात, 3 *x* 2 = – 4 *साल* .

 

3 

EXERCISE 10.2

में प्रत्येक का अगले अभ्यास 1 को 6, खोजो COORDINATES का केंद्र, एक्सिस का परवलय, समीकरण का नियता और लंबाई का लैटस मलाशय.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. *y2* \_ = 12 *एक्स* | 2. *एक्स* 2 = 6 *साल* | 3. | *y2* \_ = - 8x *\_* |
| 4. *एक्स* 2 = - 16 *वर्ष* | 5. *y2* \_ = 10 *एक्स* | 6. | *एक्स* 2 = - 9 *साल* |

में प्रत्येक का अभ्यास 7 को 12, खोजो समीकरण का परवलय वह संतुष्ट दिया गया स्थितियाँ:

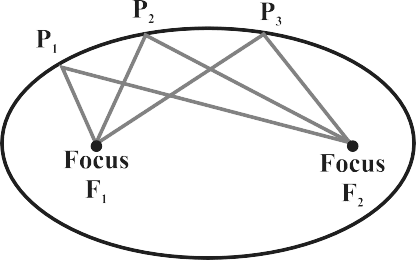
शांकव धारा 187

7. केंद्र (6,0); डायरेक्ट्रिक्स *एक्स* = – 6 8. केंद्र (0,–3); नियता *य* = 3

9. शिखर (0,0); केंद्र (3,0) 10. शिखर (0,0); फोकस (-2,0)

1. शिखर (0,0) पासिंग के माध्यम से (2,3) और एक्सिस है साथ में *एक्स* -अक्ष.
2. शिखर (0,0), पासिंग के माध्यम से (5,2) और सममित साथ आदर को *y* -अक्ष.

#### 10. 5 दीर्घवृत्त



the distances of a point on the ellipse from the two fixed points is always greater than the distance between the two fixed points.

�Note The constant which is the sum of

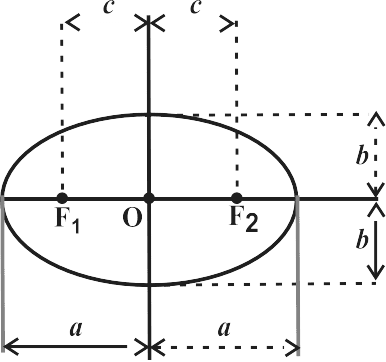
Definition 4 An *ellipse* is the set of all points in a plane, the sum of whose distances from two fixed points in the plane is a constant.

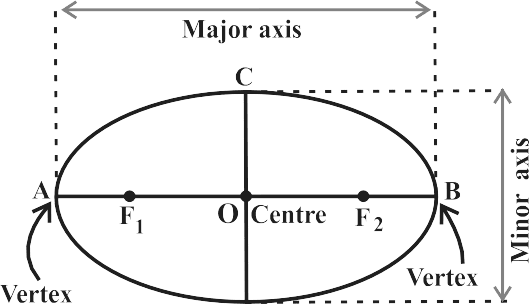
The two fixed points are called the *foci* (plural of ‘*focus*’) of the ellipse (Fig10.20).

Fig 10.20



नाभियों को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु को *केंद्र कहा* जाता है दीर्घवृत्त. रेखा खंड के माध्यम से फोकी का अंडाकार है बुलाया *प्रमुख एक्सिस* और रेखा खंड के माध्यम से केंद्र और सीधा को प्रमुख एक्सिस है बुलाया *नाबालिग एक्सिस* । अंत अंक का प्रमुख एक्सिस हैं बुलाया *कोने* का दीर्घवृत्त(चित्र 10.21).



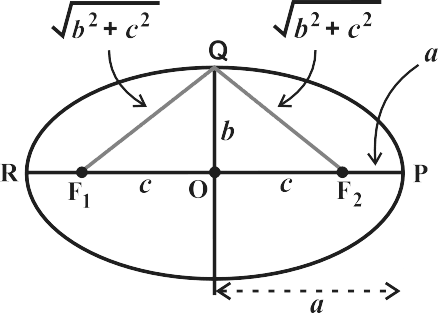


अंजीर 10.21 चित्र 10.22

हम निरूपित लंबाई का प्रमुख एक्सिस द्वारा 2 *ए* , लंबाई का नाबालिग एक्सिस द्वारा 2 *बी* और नाभियों के बीच की दूरी 2 *c है* । इस प्रकार, अर्ध प्रमुख अक्ष की लंबाई है *a* और अर्द्ध नाबालिग एक्सिस है *बी* (चित्र10.22).

188 गणित

* + 1. *अर्ध-प्रमुख के बीच संबंध अक्ष, अर्ध-लघु अक्ष और की दूरी दीर्घवृत्त के केंद्र से फोकस* (अंजीर 10.23).



लेना एक बिंदु पी पर एक के अंत प्रमुख एक्सिस।

जोड़ का दूरी का बिंदु पी को फोकी है एफ 1 पी + एफ 2 पी = एफ 1 ओ + सेशन + एफ 2 पी

(तब से, एफ 1 पी = एफ 1 ओ + ओपी)

= *सी* + *ए* + *ए* – *सी* = 2 *ए*

लेना ए बिंदु क्यू पर एक अंत का नाबालिग एक्सिस।

जोड़ का दूरी से बिंदु क्यू को फोकी है

अंजीर 10.23

एफ 1 प्र + एफ 2 प्र = + = 2

*b*2 + *c*2

*b*2 + *c*2

*b*2 + *c*2

तब से दोनों पी और क्यू झूठ पर दीर्घवृत्त. द्वारा परिभाषा का दीर्घवृत्त, हम पास होना

2 = 2 *ए* , यानी, *ए* =

*b*2 + *c*2

*b*2 + *c*2

या *ए* 2 = *बी* 2 + *सी* 2 , अर्थात, *सी* = .

*a*2 − *b*2

##### सनक

परिभाषा 5 सनक का एक अंडाकार है अनुपात का दूरी से केंद्र का अंडाकार को एक का फोकी और को एक का कोने का अंडाकार (सनकीपन है

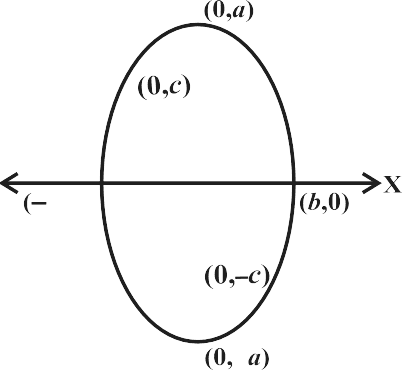
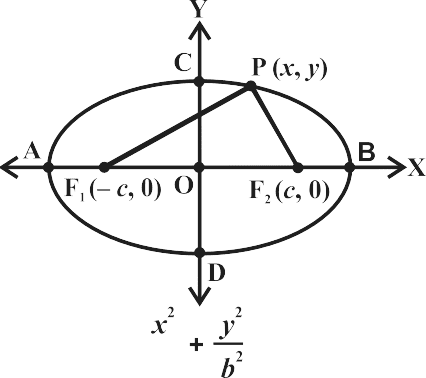
लक्षित द्वारा *इ* ) अर्थात, *इ ए* .

फिर चूंकि फोकस विलक्षणता के संदर्भ में केंद्र से *c की दूरी पर है* केंद्र है पर ए दूरी का *ऐ* से केंद्र।

* + 1. दीर्घवृत्त *के मानक समीकरण* का समीकरण एक दीर्घवृत्त सबसे सरल है यदि दीर्घवृत्त का केंद्र मूल बिंदु पर है और नाभियाँ *x-* अक्ष या *y-* अक्ष पर हैं। दो ऐसा संभव झुकाव हैं दिखाया में अंजीर 10.24.

हम इच्छा निकाले जाते हैं समीकरण के लिए अंडाकार दिखाया ऊपर में अंजीर 10.24 (ए) साथ फोकी पर *एक्स* -अक्ष.

शांकव धारा 189

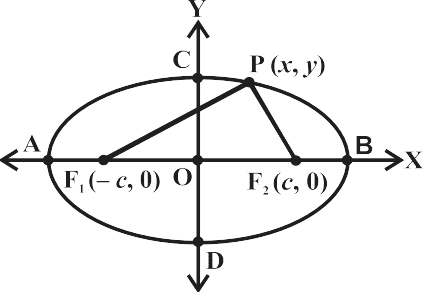


(ए)



अंजीर 10.24 

होने देना एफ 1 और एफ 2 होना फोकी और हे होना मध्य-बिंदु का रेखा खंड एफ 1 एफ 2 . होने देना हे मूल बिंदु और O से होकर जाने वाली रेखा बनें एफ 2 सकारात्मक रहें *एक्स* -अक्ष और वह के माध्यम से एफ 1 के रूप में नकारात्मक *एक्स* -अक्ष.



होने देना, रेखा के माध्यम से हे सीधा को

*एक्स* -अक्ष होना *y* -अक्ष. होने देना COORDINATES का एफ 1 होना (- *सी* , 0) और एफ 2 होना ( *सी* , 0) (अंजीर 10.25).

होने देना पी( *एक्स* , *य* ) होना कोई बिंदु पर अंडाकार ऐसा

वह जोड़ का दूरी से पी को दो फोकी होना 2 *ए* इसलिए दिया गया

पीएफ 1 + पीएफ 2 = 2 *ए*  (1)

का उपयोग करते हुए दूरी सूत्र, हम पास होना

+ = 2 *ए*

(*x* + *c*)2 + *y*2

( *x* − *c*)2 + *y*2

*एक्स* 2 *वाई* 2

2 2 1

+

=

अर्थात,

= 2 *ए* –

(*x* + *c*)2 + *y*2

*ए*  *बी*

अंजीर 10.25

बराबरी दोनों पक्ष, हम पाना

(*x* − *c*)2 + *y*2

( *एक्स* + *ग* ) 2+ \_ *य* 2 = 4 *ए* 2 – 4 *ए*

(*x* − *c*)2 + *y*2

+ ( *एक्स* − *ग* ) 2 + *य* 2

190 गणित

कौन पर सरलीकरण देता है

= *ए* − *सी एक्स*

(*x* − *c*)2 + *y*2

*ए*

बराबरी दोबारा और सरल बनाना, हम पाना

*एक्स*  +

2

*ए* 2 *ए* 2

*एक्स* 2 *वाई* 2

*य* 2

– *सी* 2 = 1

अर्थात,

+

*ए* 2 *बी* 2

= 1 (से.) *सी* 2 = *एक* 2 – *बी* 2 )

इस तरह कोई बिंदु पर अंडाकार संतुष्ट

*एक्स*  + *य* 2

2

*ए* 2 *बी* 2

= 1. ... (2)

इसके विपरीत, होने देना पी ( *एक्स* , *य* ) समीकरण को संतुष्ट करें (2) साथ 0 < *सी* < *ए* । तब

#### 

*य* 2 = *बी* 2 

#### 

2 

#### 1 − 

*x*

*एक* 2 

इसलिए, पीएफ 1  =

(*x* *c*)2 + *y*2

=

( *x* + *c*) + *b*

2

2  *a*2 − *x*2 





*a*2





= (से *बी* 2 = *एक* 2 – *सी* 2 )

(*x* + *c*) + (*a* − *c* )

2 2

2  2 − *x*2 



*a*2





=

इसी प्रकार पीएफ 2 =

*ए* − *सी एक्स*

*a –* *x*

= *ए* + *सी एक्स*

*ए*

 *x* 2





+





अत: पीएफ 1

+ पीएफ 2 =

*ए* + *सी एक्स* + *सी*  = 2 *ए ए*

... (3)

इसलिए, कोई बिंदु वह संतुष्ट पी( *एक्स, य)* झूठ पर दीर्घवृत्त.

*एक्स*  + *य* 2

2

*ए* 2 *बी* 2

शांकव धारा 191

= 1, संतुष्ट ज्यामितिक स्थिति और इसलिए

इस तरह से (2) और (3), हम साबित वह समीकरण का एक अंडाकार साथ केंद्र का मूल और प्रमुख एक्सिस साथ में *एक्स* -अक्ष है

2 + *y2* \_

2  *बी* 2 = 1.

बहस से समीकरण का अंडाकार प्राप्त किया ऊपर, यह इस प्रकार वह के लिए प्रत्येक बिंदु पी ( *एक्स* , *य* ) पर दीर्घवृत्त, हम पास होना

*एक्स*  = 1 − *य*

2

2

*ए* 2 *बी* 2

≤ 1, अर्थात, *एक्स* 2

≤ *एक* 2 , इसलिए – *ए* ≤ *एक्स* ≤ *एक।*

इसलिए, अंडाकार झूठ बीच में पंक्तियां *एक्स* = – *ए* और *एक्स* = *ए* और छू लेती है इन पंक्तियाँ. इसी प्रकार, अंडाकार झूठ बीच में पंक्तियां *य* = – *बी* और *य* = *बी* और छू लेती है इन

पंक्तियाँ.

*एक्स* 2 + *य* 2 =

इसी प्रकार, हम कर सकना निकाले जाते हैं समीकरण का अंडाकार में अंजीर 10.24 (बी) जैसा *बी* 2

इन दो समीकरण हैं ज्ञात जैसा *मानक समीकरण* का दीर्घवृत्त.

*ए* 2 1 .

major and minor axis are coordinate axes. However, the study of the ellipses with centre at any other point, and any line through the centre as major and the minor axes passing through the centre and perpendicular to major axis are beyond the scope here.

�Note The standard equations of ellipses have centre at the origin and the

दीर्घवृत्त के मानक समीकरणों (आकृति 10.24) से, हमें निम्नलिखित मिलता है अवलोकन:

1. अंडाकार है सममित साथ आदर को दोनों कोआर्डिनेट कुल्हाड़ियों तब से अगर ( *x* , *y* ) दीर्घवृत्त पर एक बिंदु है, तो (- *x* , *y* ), ( *x* , - *y* ) और (- *x* , - *y* ) भी बिंदु हैं दीर्घवृत्त.
2. फोकी हमेशा झूठ पर प्रमुख एक्सिस। प्रमुख एक्सिस कर सकना होना दृढ़ निश्चय वाला द्वारा खोज अवरोध पर कुल्हाड़ियों का समरूपता वह है, प्रमुख एक्सिस है साथ में *एक्स* -अक्ष यदि *x* 2 के गुणांक का हर बड़ा है और यह *y-* अक्ष के अनुदिश है यदि गुणक का *य* 2 है बड़ा हर

192 गणित

##### लैटस मलाशय

परिभाषा 6 दीर्घवृत्त का लैटस रेक्टम एक है प्रमुख अक्ष पर लंबवत रेखा खंड किसी भी फोकस और जिसके अंतिम बिंदु के माध्यम से झूठ पर अंडाकार (अंजीर 10.26).

को खोजो लंबाई का लैटस मलाशय

*एक्स* 2 *वाई* 2

का अंडाकार

*एक* 2 + *बी* 2 =1

होने देना लंबाई का वायुसेना 2 होना *एल* .

तब COORDINATES का ए हैं ( *सी* , *एल* ) *,* अर्थात, ( *एई* , *एल* )

अंजीर 10. 26

*एक्स* 2 + *य* 2 =

तब से ए झूठ पर अंडाकार *ए* 2 *बी* 2 1 , हम पास होना

( *एई* ) 2 + *एल* 2 =

*ए* 2 *बी* 2 1

⇒ *मैं 2* = *बी* 2 (1 – *ई* 2 )

लेकिन

*ई* 2 = *सी*

2

2

*a2* \_ *- बी* 2

*a2* \_

=

*बी* 2

1 *- a2* \_

=

इसलिए *l2 \_* =

*बी* 4 *बी* 2

*a2* \_ , अर्थात, *एल* =

तब से अंडाकार है सममित साथ आदर को *y* -अक्ष (का अवधि, यह है सममित wrt

2 *बी* 2

दोनों निर्देशांक अक्ष), वायुसेना 2 = एफ 2 बी और इसी तरह लंबाई की लैटस रेक्टम *एक है* .

उदाहरण 9 खोजो COORDINATES का फोकस, शिखर, लंबाई की प्रमुख एक्सिस, नाबालिग एक्सिस, सनक और लैटस मलाशय का अंडाकार

*एक्स* 2 *वाई* 2

1

=

25 9

2 *य* 2

समाधान तब से भाजक का 25 है बड़ा बजाय भाजक का 9 , प्रमुख

शांकव धारा 193

*एक्स* 2 + *य* 2 =

एक्सिस है साथ में *एक्स* -अक्ष. की तुलना दिया गया समीकरण साथ *ए* 2 *बी* 2 1 , हम पाना

*ए* = 5 और *बी* = 3. भी

*सी*  = = 4

*a*2 *– b*2

25 *–* 9

इसलिए, COORDINATES का फोकी हैं (- 4,0) और (4,0), कोने हैं (- 5, 0) और (5, 0). लंबाई का प्रमुख एक्सिस है 10 इकाइयां लंबाई का नाबालिग एक्सिस 2 *बी* है 6 इकाइयां और

सनक है

4

5 और लैटस मलाशय है

2 *बी* 2  18

*एक*  5 .

उदाहरण 10 खोजो COORDINATES का फोकस, शिखर, लंबाई का प्रमुख और नाबालिग अक्ष और दीर्घवृत्त की विलक्षणता 9 *x* 2 +4 *य* 2 = 36.

समाधान \_ का समीकरण दिया गया है दीर्घवृत्त कर सकते हैं मानक रूप में लिखा जाए जैसा

*एक्स* 2 *वाई* 2

=

1

4 9

तब से भाजक का *य*

2

9

है बड़ा बजाय भाजक का

2

4 , प्रमुख एक्सिस है

साथ में *y* -अक्ष. की तुलना दिया गया समीकरण साथ मानक समीकरण

*एक्स* 2 + *य* 2 =

*बी* 2 *ए* 2 1 , हम पास होना *बी* = 2 और *ए* = 3.

साथ ही *सी* === \_ \_

2 *– b*2

9 *–* 4



5



और

*इ* = *सी* = 5 3

इस तरह फोकी हैं (0,

) और (0, –

), कोने हैं (0,3) और (0, –3), लंबाई का

प्रमुख एक्सिस है 6 इकाइयाँ, लंबाई का नाबालिग एक्सिस है 4 इकाइयां और सनक का



5



5

अंडाकार 5 है .



3

उदाहरण 11 खोजें समीकरण उस दीर्घवृत्त का जिसके शीर्ष हैं ( ± 13, 0) और फोकस हैं ( ± 5, 0).

समाधान तब से कोने हैं पर *एक्स* -अक्ष, समीकरण इच्छा होना का रूप

*एक्स* 2 + *य* 2 =

*ए* 2 *बी* 2 1 , कहां *ए* अर्ध-प्रमुख है एक्सिस।

194 गणित

मान लें कि *ए* = 13, *सी* = ± 5.

इसलिए, से रिश्ता *सी* 2 = *एक* 2 – *बी* 2 , हम पाना

25 = 169 – *बी* 2 , अर्थात, *बी* = 12

*एक्स* 2 *वाई* 2 =

इस तरह समीकरण का अंडाकार है 169 144 1 .

उदाहरण 12 खोजो समीकरण का दीर्घवृत्त, किसका लंबाई का प्रमुख एक्सिस है 20 और फोकी हैं (0, ± 5).

समाधान तब से फोकी हैं पर *y* -अक्ष, प्रमुख एक्सिस है साथ में *y* -अक्ष. इसलिए, समीकरण

*एक्स* 2 + *य* 2 =

का अंडाकार है का रूप *बी* 2

दिया गया वह

*एक* 2 1 .

*ए* = अर्द्ध प्रमुख एक्सिस = 20 = 10

2

और संबंध *सी* 2 = *एक* 2 – *बी* 2 देता है

5 2 = 10 2 – *बी* 2 अर्थात *, बी* 2 = 75

इसलिए, समीकरण का अंडाकार है

*एक्स* 2 + *य*  =

1

75 100

2

उदाहरण 13 खोजो समीकरण का दीर्घवृत्त, साथ प्रमुख एक्सिस साथ में *एक्स* -अक्ष और पासिंग के माध्यम से अंक (4, 3) और (- 1,4).

समाधान मानक रूप का अंडाकार है *एक्स*

2

2

और (-1, 4) झूठ पर दीर्घवृत्त, हम लीजिये *\_*

2

+ = 1. तब से अंक (4, 3)

*y*

*बी* 2

#### 16 + 9 = 1

*ए* 2 *बी* 2

... (1)

और

#### 1+ \_ 16

*ए* 2 *बी* 2

= 1 ....(2)

हल समीकरण (1) और (2), हम खोजो वह *एक* 2 = 247

7

और *बी* 2 = 247 .

15

इस तरह आवश्यक समीकरण है

शांकव धारा 195

*एक्स* 2+ \_

 247 

*य* 2

247

= 1 , अर्थात, 7 *x* 2 + 15 *वर्ष* 2 = 247.

 7  15

 

EXERCISE 10.3

में प्रत्येक का अभ्यास 1 को 9, खोजो COORDINATES का फोकस, शिखर, लंबाई का प्रमुख एक्सिस, नाबालिग एक्सिस, सनक और लंबाई का लैटस मलाशय का दीर्घवृत्त.

*एक्स* 2 *वाई* 2

=

1.1 \_

*एक्स* 2 *वाई* 2

2. = 1

*एक्स* 2 *वाई* 2

3. = 1

36 16

4 25

16 9

*एक्स* 2 *वाई* 2

4. = 1

*एक्स* 2 *वाई* 2

5. = 1

*एक्स* 2 *य* 2

6. = 1

+

25 100

49 36

#### 100 400

7. 36 *x* 2 + 4y2 *\_* \_ = 144 8. 16 *x* 2 + *y2* \_ = 16 9. 4 *x* 2 + 9 *य* 2 = 36

में प्रत्येक का अगले अभ्यास 10 को 20, खोजो समीकरण के लिए अंडाकार वह संतुष्ट दिया गया स्थितियाँ:

10. कोने ( ± 5, 0), फोकी ( ± 4, 0)

11। कोने (0, ± 13), फोकी (0, ± 5)

12. कोने ( ± 6, 0), फोकी ( ± 4, 0)

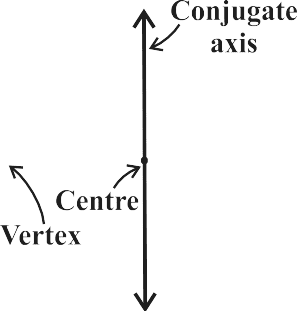
1. समाप्त होता है का प्रमुख एक्सिस ( ± 3, 0), समाप्त होता है का नाबालिग एक्सिस (0, ± 2)
2. समाप्त होता है का प्रमुख एक्सिस (0, ± 5 ), समाप्त होता है का नाबालिग एक्सिस ( ± 1, 0)
3. लंबाई का प्रमुख एक्सिस 26, फोकी ( ± 5, 0)
4. लंबाई का नाबालिग एक्सिस 16, फोकी (0, ± 6).

17. फोकी ( ± 3, 0), *ए* = 4

1. *बी* = 3, *सी* = 4, केंद्र पर मूल; फोकी पर *एक्स* एक्सिस।
2. केंद्र पर (0,0), प्रमुख एक्सिस पर *y* -अक्ष और गुजरता के माध्यम से अंक (3, 2) और (1,6).
3. प्रमुख एक्सिस पर *एक्स* -अक्ष और गुजरता के माध्यम से अंक (4,3) और (6,2).
   1. अतिशयोक्ति

परिभाषा 7 ए अतिशयोक्ति है तय करना का सभी अंक में ए विमान, अंतर का किसका दूरी से दो तय अंक में विमान है ए स्थिर।

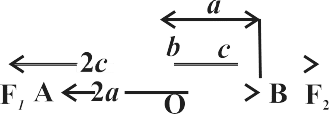
196 गणित



अंजीर 10.27

शब्द " *अंतर* " का अर्थ दूरी है आगे बिंदु ऋण दूरी को करीब बिंदु। दो तय अंक हैं बुलाया फोकी का अतिपरवलय. मध्य-बिंदु का रेखा खंड में शामिल होने फोकी है इसको कॉल किया गया *हाइपरबोला का केंद्र* . नाभियों से होकर गुजरने वाली रेखा को *अनुप्रस्थ अक्ष* कहते हैं रेखा के माध्यम से केंद्र और सीधा को आड़ा एक्सिस है बुलाया *संयुग्म एक्सिस* । अंक पर कौन अतिशयोक्ति

काटती है आड़ा एक्सिस हैं बुलाया



*कोने का अतिशयोक्ति* (अंजीर 10.27).

हम निरूपित दूरी बीच में दो फोकस बटा 2 *सी* , दो के बीच की दूरी कोने (द लंबाई का आड़ा एक्सिस) द्वारा 2 *ए* और हम परिभाषित करना मात्रा *बी* जैसा

*बी* =

2 *– a*2

भी 2 *बी* है लंबाई का संयुग्म एक्सिस (अंजीर 10.28).

को खोजो स्थिर पी 1 एफ 2 – पी 1 एफ 1 :



अंजीर 10.28

ले कर बिंदु पी पर ए और बी चित्र में 10.28, हम पास होना बीएफ 1 – बीएफ 2 = वायुसेना 2 – एएफ 1 (से की परिभाषा अतिपरवलय)

बी ० ए +एएफ 1 - बीएफ 2 = अब + बीएफ 2 - एएफ 1

अर्थात, एएफ 1 = बीएफ 2

इसलिए वह, बीएफ 1 – बीएफ 2 = बी ० ए + एएफ 1 - बीएफ 2 = बी ० ए = 2 *ए*

शांकव धारा 197

##### सनक

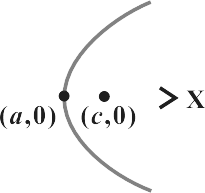
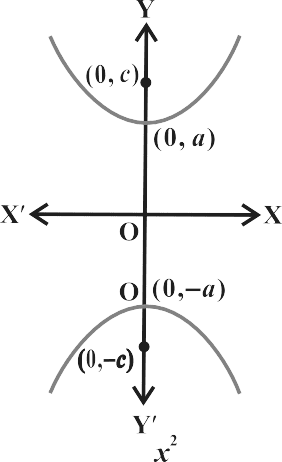
*सी*

परिभाषा 8 अभी पसंद एक दीर्घवृत्त, अनुपात *इ* = है बुलाया *सनक का*

*अतिपरवलय* । चूँकि *c* ≥ *a* , विलक्षणता कभी भी एक से कम नहीं होती है। के रूप में विलक्षणता, फोकी हैं पर ए दूरी का *ऐ* से केंद्र।

* + 1. *का मानक समीकरण अतिशयोक्ति* हाइपरबोला का समीकरण सबसे सरल है यदि केंद्र का अतिशयोक्ति है पर मूल और फोकी हैं पर *एक्स* -अक्ष या *y* -अक्ष. दो ऐसा संभव झुकाव हैं दिखाया में चित्र10.29.

(बी)

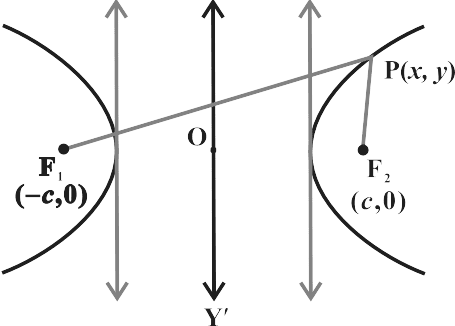


(a)

अंजीर 10.29

हम इच्छा निकाले जाते हैं समीकरण के लिए अतिशयोक्ति दिखाया में अंजीर 10.29(ए) साथ *फोकी* पर *एक्स* -अक्ष.

होने देना एफ 1 और एफ 2 होना फोकी और हे होना मध्य-बिंदु का रेखा खंड एफ 1 एफ 2 . होने देना हे होना मूल और रेखा के माध्यम से हे



के माध्यम से एफ 2 होना सकारात्मक *एक्स* -अक्ष और वह के माध्यम से एफ 1 जैसा नकारात्मक *एक्स* -अक्ष. रेखा के माध्यम से हे सीधा को *एक्स* -अक्ष होना *y* -अक्ष. माना कि F 1 के निर्देशांक हैं (- *सी* ,0) और एफ 2 हो ( *सी* ,0) (अंजीर 10.30). मान लीजिए P( *x* , *y* ) पर कोई बिंदु है अतिशयोक्ति ऐसा वह अंतर का दूरी से पी को आगे बिंदु ऋण करीब बिंदु होना 2 *ए.*

इसलिए दिया गया *,* पीएफ 1 – पीएफ 2 = 2 *ए*

अंजीर 10.30

198 गणित

अर्थात,

का उपयोग करते हुए दूरी सूत्र, हम पास होना

*–*

( + *c*)2 + *y*2

(*x – c*)2 + *y*2

= 2 *ए* +

( + *c*)2 + *y*2

(*x – c*)2 + *y*2

= 2 *ए*

बराबरी दोनों ओर, हम पाना

( *एक्स + ग* ) *2 + य 2 =* 4 *ए 2* + 4 *ए* और पर सरल बनाना, हम पाना

( *– c*)2 + *y*2

*सीएक्स* – *ए* =

( *– c*)2 + *y*2

*ए*

पर बराबरी दोबारा और आगे सरल बनाना, हम पाना

+ ( *एक्स – ग* ) *2* + *य 2*

*एक्स* 2 *वाई* 2

*a2* \_ *- सी* 2 *- एक* 2  1

अर्थात,

*एक्स* 2 *वाई* 2

2 *-* 2 = 1

(तब से *सी* 2 - *a2* \_ = *बी* 2 )

*ए*  *बी*

*एक्स* 2 *वाई* 2

इस तरह कोई पर इशारा करें अतिपरवलय संतुष्ट *एक* 2 *– बी* 2 1

इसके विपरीत, होने देना पी( *एक्स* , *y* ) उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करें 0 < के साथ *ए* < *सी* । तब

 2 *– एक* 2 

*य* 2 = *बी* 2  *ए* 2 

 

इसलिए, पीएफ 1 = +

( + *c*)2 + *y*2

(*x* + *c*) + *b*

2

2 



2 *– a*2 

*a*2





= +

इसी प्रकार, पीएफ 2 = *ए* – *सी एक्स*

*सी*

= *ए* + *ए एक्स*

में अतिशयोक्ति *सी* > *ए* ; और तब से पी है को सही का रेखा *एक्स* = *ए* , *एक्स* > *ए* , *एक्स* > *ए* । इसलिए,

*ए* - *एक्स* बन जाता है नकारात्मक। इस प्रकार, पीएफ 2 = *एक्स* – *एक।*

शांकव धारा 199

*एक्स*

इसलिए पीएफ 1 – पीएफ 2 = *ए* + *एक्स* – + *ए* = 2 *ए*

भी, ध्यान दें कि यदि पी है तक बाएं की रेखा *एक्स* = – *ए* , फिर

पीएफ 1 =

 *ए* +

ए *\_*

*एक्स*  , पीएफ

2 \_



= *ए* – *ए*  ।

*एक्स* 2 *वाई* 2

में वह मामला पी एफ 2 – पीएफ 1 = 2 *ए* . इसलिए, कोई बिंदु वह संतुष्ट

अतिपरवलय.

*एक* 2 *– बी* 2 1 , झूठ पर

इस प्रकार, हम साबित वह समीकरण का अतिशयोक्ति साथ मूल (0,0) और आड़ा एक्सिस

*एक्स* 2 *वाई* 2

साथ में *एक्स* -अक्ष है

*एक* 2 *– बी* 2 1 .

�Note A hyperbola in which *a* = *b* is called an *equilateral hyperbola*.

बहस से समीकरण का अतिशयोक्ति हम पास होना प्राप्त किया, यह इस प्रकार वह, हम

पास होना के लिए प्रत्येक बिंदु ( *एक्स* , *वाई* ) पर अतिपरवलय,

2

*एक* 2 =

*य* 2

1+ \_ *बी* 2

≥ 1.

अर्थात,

≥ 1, अर्थात, *एक्स* ≤ – *ए* या *एक्स* ≥ *ए* । इसलिए, नहीं हिस्से का वक्र झूठ बीच में

पंक्तियां *एक्स* = + *ए* और *एक्स* = – *ए,* (अर्थात नहीं असली अवरोधन पर संयुग्म एक्सिस)।

*x*

*a*

*य* 2

इसी प्रकार, हम कर सकना निकाले जाते हैं समीकरण का अतिशयोक्ति में अंजीर 11.31 (बी) जैसा *एक* 2

*एक्स* 2

*बी* 2 = 1

इन दो समीकरण हैं ज्ञात जैसा *मानक समीकरण* का *अतिपरवलय* ।

axes as the coordinate axes and the centre at the origin. However, there are hyperbolas with any two perpendicular lines as transverse and conjugate axes, but the study of such cases will be dealt in higher classes.

�Note The standard equations of hyperbolas have transverse and conjugate

से मानक समीकरण का अतिपरवलय (चित्र10.27), हम पास होना अगले अवलोकन:

1. अतिशयोक्ति है सममित साथ आदर को दोनों कुल्हाड़ी, तब से अगर ( *एक्स* , *य* ) है ए बिंदु पर अतिपरवलय, तब (- *एक्स* , *य* ), ( *एक्स* , – *य* ) और (- *एक्स* , – *य* ) हैं भी अंक पर अतिपरवलय.

200 गणित

1. फोकी हैं हमेशा पर आड़ा एक्सिस। यह है सकारात्मक अवधि किसका

भाजक देता है आड़ा एक्सिस। के लिए उदाहरण,

*एक्स* 2 *वाई* 2

*–*  1

9 16

*य* 2 *x* 2

है आड़ा एक्सिस साथ में *एक्स* -अक्ष का लंबाई 6, जबकि है आड़ा एक्सिस साथ में शाफ़्ट का लंबाई 10.

* + 1. *लैटस मलाशय*

*–*  1

25 16

परिभाषा 9 लैटस मलाशय का अतिशयोक्ति है ए रेखा खंड सीधा को आड़ा एक्सिस के माध्यम से कोई का फोकी और किसका अंत अंक झूठ पर अतिपरवलय.

2 *बी* 2

जैसा में दीर्घवृत्त, यह है आसान को दिखाओ वह लंबाई का लैटस मलाशय में अतिशयोक्ति है ।

उदाहरण 14 खोजो COORDINATES का फोकी और शिखर, विलक्षणता, लंबाई का लैटस मलाशय का अतिपरवलय:

(मैं)

*एक्स*  *वाई* 2

2

*–*

1 , (ii) *य* 2 – 16 *x* 2 = 16

9 16

समाधान (मैं) की तुलना समीकरण

*एक्स*  *वाई* 2

2

*–*

1 साथ मानक समीकरण

*एक्स* 2 *वाई* 2

9 16

*एक* 2 *– बी* 2 = 1

*a*2 + *b*2

9 + 16

यहाँ, *ए* = 3, *बी* = 4 और *सी* =

== \_ 5

इसलिए, COORDINATES का फोकी हैं ( ± 5, 0) और वह का कोने हैं ( ± 3, 0).इसके अलावा,

*सी*

सनक *इ* =

5

3 . लैटस मलाशय

= 2 *बी* 2 = 32

3

*य* 2 *x* 2

(ii) डिवाइडिंग समीकरण द्वारा 16 पर दोनों पक्ष, हम पास होना 16 *–* 11 \_

*य* 2 *x* 2

की तुलना समीकरण साथ मानक समीकरण

*एक* 2 *– बी* 2 = 1 , हम खोजो वह

*ए* = 4, *बी* = 1 और *सी* === \_ \_ 17 *.*

*a*2 + *b*2

16 +1

शांकव धारा 201

इसलिए, COORDINATES का फोकी हैं (0, ±



17

(0, ± 4). भी,

) और वह का कोने हैं

सनक

17 . लैटस मलाशय

4



2 *बी* 2

.

###### 2

उदाहरण 15 खोजो समीकरण का अतिशयोक्ति साथ फोकी (0, ± 3) और कोने

(0, ± 11 ).



2

समाधान तब से फोकी है पर y-अक्ष, समीकरण का अतिशयोक्ति है का रूप

*य* 2 2

2 *बी* 2 1

तब से कोने हैं (0, ± 11



2

), *ए* = 2

25



भी, तब से फोकी हैं (0, ± 3); *सी* = 3 और *बी* 2 = *सी* 2 – *एक* 2 = 4 .

इसलिए, समीकरण का अतिशयोक्ति है

*य* 2 2

 11   25 

= 1, अर्थात, 100 *y2* \_ - 44 *एक्स* 2 = 275.

 4   4 

उदाहरण 16 खोजो समीकरण का अतिशयोक्ति कहाँ फोकी हैं (0, ± 12) और लंबाई का लैटस मलाशय 36 है.

समाधान तब से फोकी हैं (0, ± 12), यह उसका अनुसरण करता है *सी* = 12.

लंबाई की लैटस मलाशय =

2 *बी* 2

36 या *बी* 2 = 18 *ए*

इसलिए *सी* 2 = *एक* 2 + *बी* 2 ; देता है 144 = *एक* 2 + 18 *ए*

यानी, *एक* 2 + 18 *ए* – 144 = 0,

तो *ए* = – 24, 6.

तब से *ए* नही सकता होना नकारात्मक, हम लेना *ए* = 6 और इसलिए *बी* 2 = 108.

*य* 2 2

इसलिए, समीकरण का आवश्यक अतिशयोक्ति है 36 108

= , अर्थात, 3 *य* 2 – *एक्स* 2 = 108

202 गणित

EXERCISE 10.4

में प्रत्येक का अभ्यास 1 को 6, खोजो COORDINATES का फोकी और शिखर, सनक और लंबाई का लैटस का मलाशय अतिपरवलय.

1. *एक्स – य*  1

2

2

1. *य – एक्स*  1

2

2

3. 9 *य* 2 – 4 *x* 2 = 36

16 9 9 27

4. 16 *x* 2 - 9 *य* 2 = 576 5. 5 *य* 2 - 9 *x* 2 = 36 6. 49 *य* 2 - 16 *x* 2 = 784.

में प्रत्येक का अभ्यास 7 को 15, खोजो समीकरण का अतिशयोक्ति संतुष्टि देने वाला दिया गया स्थितियाँ।

7. कोने ( ± 2, 0), फोकी ( ± 3, 0)

8. कोने (0, ± 5), फोकी (0, ± 8)

9. कोने (0, ± 3), फोकी (0, ± 5)

1. फोकी ( ± 5, 0), आड़ा एक्सिस है का लंबाई 8.
2. फोकी (0, ± 13), संयुग्म एक्सिस है का लंबाई 24.
3. फोकी ( ± 3



5

, 0), लैटस मलाशय है का लंबाई 8.

1. फोकी ( ± 4, 0), लैटस मलाशय है का लंबाई 12

14. कोने ( ± 7,0), *इ* = 4 .

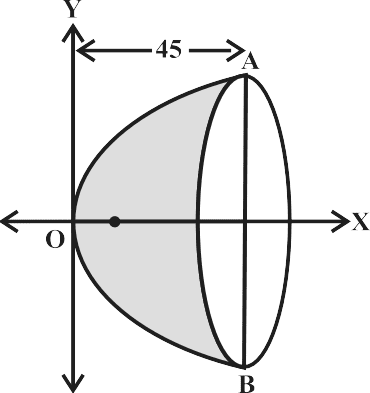
#### 3

15. फोकी (0, ± ), पासिंग के माध्यम से (2,3)



10

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 17 चित्र 10.31 में दर्शाए अनुसार एक परवलयिक दर्पण का फोकस दूरी पर है 5 सेमी से इसका शिखर. अगर आईना है 45 सेमी गहरा, खोजो

दूरी \_ अब (अंजीर 10.31).

समाधान चूंकि फोकस से दूरी शिखर है 5 सेमी। हम पास होना, *ए* = 5. अगर मूल है लिया पर दर्पण का शीर्ष और अक्ष इसके अनुदिश स्थित होते हैं सकारात्मक *एक्स* -अक्ष, समीकरण का अणुवृत्त आकार का अनुभाग है

*य* 2 = 4 (5) *एक्स* = 20 *एक्स*

टिप्पणी वह *एक्स* = 45. इस प्रकार

*य* 2 = 900

इसलिए *य =* ± 30

अत: ए.बी = 2 *य* = 2 × 30 = 60 सेमी।

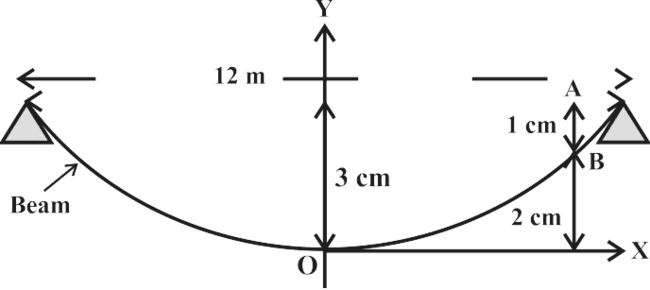
उदाहरण 18 ए खुशी से उछलना है का समर्थन किया पर इसका समाप्त होता है चित्र द्वारा 10.31

का समर्थन करता है कौन हैं 12 एम-eters अलग। तब से भार संकेन्द्रित है पर इसका केंद्र, वहाँ

शांकव धारा 203

है ए नीचे को झुकाव का 3 सेमी पर केंद्र और विचलित हुई खुशी से उछलना है में आकार का ए परवलय. कैसे दूर से केंद्र है नीचे को झुकाव 1 सेमी?

समाधान होने देना शिखर होना पर सबसे कम बिंदु और एक्सिस खड़ा। होने देना कोआर्डिनेट एक्सिस होना चुना जैसा दिखाया में अंजीर 10.32.



अंजीर 10.32

समीकरण का परवलय लेता है रूप *एक्स* 2 = 4 *अय* . तब से यह गुजरता के माध्यम से

 6 *,* 3

 

 , हम पास होना (6) 2 = 4 *ए*

3 

 , अर्थात, *ए* =

36 × 100

= 300 एम

 100 

 100 12 \_

1 2

होने देना अब होना नीचे को झुकाव का खुशी से उछलना कौन है 100 एम। COORDINATES का बी हैं ( *एक्स* , 100 ).

2

इसलिए *x* 2 = 4 × 300 × 100 = 24



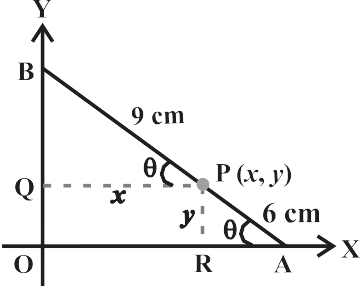
6

यानी *एक्स* =



24

= 2 मीटर

उदाहरण 19 15 सेमी लंबाई की एक छड़ AB दो निर्देशांक अक्षों के बीच में स्थित है ए रास्ता कि \_ अंत बिंदु ए पर स्थित है *x* -अक्ष और अंत बिंदु बी पर स्थित है *y* -अक्ष. ए बिंदु पी( *एक्स* , *य* ) है लिया पर छड़ में ऐसा ए रास्ता

वह एपी = 6 सेमी। दिखाओ वह ठिकाना का पी है एक दीर्घवृत्त.

हल मान लीजिए AB एक छड़ है जो θ कोण बनाती है OX जैसा कि चित्र 10.33 में दिखाया गया है और उस पर बिंदु P ( *x* , *y ) है* ऐसा है कि एपी = 6 सेमी।

एबी के बाद से = 15 सेमी, हम पास होना

पंजाब = 9 सेमी।

से पी खींचना पी क्यू और जनसंपर्क लंबवत पर *y* -अक्ष और

*एक्स* -अक्ष, क्रमश। अंजीर 10.33

204 गणित

∆ से पीबीक्यू, ओल θ =

9

*य*

डी से पीआरए, पाप मैं =

6

चूंकि कॉस 2 मैं + पाप 2 मैं = 1

 *एक्स*  2   *य* 2 \_

    = 1

9 6

   

*एक्स* 2 *वाई* 2

1

+ =

या 81 36

इस प्रकार ठिकाना का पी है एक दीर्घवृत्त.

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 10

1. यदि एक परवलयिक परावर्तक है 20 सेमी व्यास में और 5 सेमी गहरा, खोजो फोकस।
2. एक मेहराब है में रूप का ए परवलय साथ इसका एक्सिस खड़ा। मेहराब है 10 एम उच्च और 5 एम चौड़ा पर आधार। कैसे चौड़ा है यह 2 एम से शिखर का परवलय?
3. केबल का ए समान रूप से लदा हुआ निलंबन पुल रुक जाता है में रूप का ए परवलय. सड़क कौन है क्षैतिज और 100 एम लंबा है का समर्थन किया द्वारा खड़ा तारों जुड़ा हुआ केबल में, सबसे लंबा तार 30 मीटर और सबसे छोटा 6 मीटर है। सड़क से 18 मीटर की दूरी पर लगे सहायक तार की लंबाई ज्ञात कीजिए मध्य।
4. एक मेहराब है में रूप का ए अर्ध-दीर्घवृत्त। यह है 8 एम चौड़ा और 2 एम उच्च पर केंद्र। खोजो ऊंचाई का मेहराब पर ए बिंदु 1.5 एम से एक अंत।
5. ए छड़ का लंबाई 12 सेमी चाल साथ इसका समाप्त होता है हमेशा छू कोआर्डिनेट कुल्हाड़ियाँ ठानना समीकरण का ठिकाना का ए बिंदु पी पर छड़, कौन है 3 सेमी से अंत में संपर्क साथ एक्स *-* अक्ष.
6. खोजो क्षेत्र का त्रिकोण बनाया द्वारा पंक्तियां में शामिल होने शिखर का परवलय

*एक्स* 2 = 12 *वर्ष* को समाप्त होता है का इसका लैटस मलाशय.

1. ए आदमी दौड़ना ए दौड़ का मैदान टिप्पणियाँ वह जोड़ का दूरी से दो झंडा उससे पदों की दूरी हमेशा 10 मीटर होती है और ध्वज स्तंभों के बीच की दूरी 8 मीटर होती है। खोजो आदमी द्वारा खोजे गए पदों का समीकरण।
2. एक समभुज त्रिकोण है अंकित किया में परवलय *य* 2 = 4 *कुल्हाड़ी* , कहाँ एक शिखर है पर शिखर का परवलय. खोजो लंबाई का ओर का त्रिकोण.

शांकव धारा 205

*सारांश*

में यह अध्याय अगले अवधारणाओं और सामान्यीकरण हैं अध्ययन किया.

- ए घेरा है तय करना का सभी अंक में ए विमान वह हैं समान दूरी से ए तय बिंदु में विमान।

� द समीकरण का ए घेरा साथ केंद्र ( *एच* , *क* ) और RADIUS *आर* है

( *एक्स* – *ज* ) 2 + ( *य* – *क* ) 2 = *आर* 2 .

- ए परवलय है तय करना का सभी अंक में ए विमान वह हैं समान दूरी से ए तय रेखा और ए तय बिंदु में विमान।

� द समीकरण का परवलय साथ केंद्र पर ( *ए* , 0) *ए* > 0 और नियता *एक्स* = – *ए* है

*y2* \_ = 4ax . *\_*

- लैटस मलाशय का ए परवलय है ए रेखा खंड सीधा को एक्सिस का परवलय, के माध्यम से केंद्र और किसका अंत अंक झूठ पर परवलय.

- लंबाई का लैटस मलाशय का परवलय *य* 2 = 4 *कुल्हाड़ी* है 4 *ए* .

- एक *दीर्घवृत्त* है तय करना के सभी अंक में ए विमान, जोड़ का किसका से दूरियाँ दो तय अंक में विमान है ए स्थिर।

*एक्स* 2 *वाई* 2

� एक दीर्घवृत्त का समीकरण साथ पर ध्यान केंद्रित करें *x* -अक्ष है

*एक* 2 *+ बी* 2 *=* 1 .

- लैटस मलाशय का एक अंडाकार है ए रेखा खंड सीधा को प्रमुख एक्सिस के माध्यम से कोई का फोकी और किसका अंत अंक झूठ पर दीर्घवृत्त.

*एक्स* 2 *वाई* 2

2 *बी* 2

- लंबाई का लैटस मलाशय का अंडाकार

*एक* 2 + *बी* 2 = 1 है ।

� द सनक का एक अंडाकार है अनुपात बीच में दूरी से केंद्र का अंडाकार को एक का फोकी और को एक का कोने का दीर्घवृत्त.

- ए अतिशयोक्ति है तय करना का सभी अंक में ए विमान, अंतर का किसका दूरी से दो तय अंक में विमान है ए स्थिर।

*एक्स* 2

� द समीकरण का ए अतिशयोक्ति साथ फोकी पर *एक्स* -अक्ष है : 2

*य* 2

*बी* 2 1

=

206 गणित

�Latus rectum of hyperbola is a line segment perpendicular to the transverse axis through any of the foci and whose end points lie on the hyperbola.

*x*2

�Length of the latus rectum of the hyperbola : *a*2

*b*2

*y*2 =

1 is : .

2*b*2

*a*

�The eccentricity of a hyperbola is the ratio of the distances from the centre of

the hyperbola to one of the foci and to one of the vertices of the hyperbola.

*ऐतिहासिक टिप्पणी*

ज्यामिति गणित की सबसे प्राचीन शाखाओं में से एक है। यूनानी जियोमीटर ने कई वक्रों के गुणों की जांच की जिनमें सैद्धांतिक और हैं व्यावहारिक महत्त्व। यूक्लिड लिखा उसका निबंध पर ज्यामिति आस-पास 300 ईसा पूर्व वह वह पहले व्यक्ति थे जिन्होंने कुछ सिद्धांतों के आधार पर ज्यामितीय आकृतियों को व्यवस्थित किया सुझाव दिया द्वारा भौतिक विचार. ज्यामिति जैसा शुरू में अध्ययन द्वारा प्राचीन भारतीय और यूनानी, कौन बनाया अनिवार्य रूप से नहीं उपयोग का प्रक्रिया का बीजगणित कृत्रिम दृष्टिकोण तक विषय का ज्यामिति जैसा दिया गया द्वारा यूक्लिड और में *सुल्बसूत्र* , वगैरह।, था जारी के लिए कुछ 1300 साल। में 200 ई.पू., अपोलोनियस ने ' *द कॉनिक '* नामक एक पुस्तक लिखी जो कई शंकु वर्गों के बारे में थी महत्वपूर्ण खोजों वह पास होना जस नायाब के लिए अठारह सदियों.

आधुनिक विश्लेषणात्मक ज्यामिति को रेने के नाम पर ' *कार्टेशियन ' कहा जाता है* डेसकार्टेस (1596-1650) जिनकी प्रासंगिक 'ला जियोमेट्री' 1637 में प्रकाशित हुई थी। लेकिन विश्लेषणात्मक ज्यामिति का मूल सिद्धांत और पद्धति पहले से ही थी की खोज की द्वारा पियरे डे फर्मेट (1601-1665)। दुर्भाग्य से, फर्मेट्स निबंध पर विषय, *एड लोकस प्लानोस एट सो लिडोस इसागोगे* (परिचय) शीर्षक से विमान और ठोस लोकी) था प्रकाशित केवल मरणोपरांत में 1679. इसलिए, डेसकार्टेस आया को होना माना जैसा अद्वितीय आविष्कारक का विश्लेषणात्मक ज्यामिति.

इसहाक बैरो ने कार्तीय पद्धति का प्रयोग करने से परहेज किया। न्यूटन ने किस विधि का प्रयोग किया? वक्रों के समीकरण खोजने के लिए अनिर्धारित गुणांक। उन्होंने अनेक प्रकार के प्रयोग किये ध्रुवीय और द्विध्रुवी सहित निर्देशांक। लीबनिट्ज़ ने ' *एब्सिस्सा '* शब्द का प्रयोग किया , 'समन्वय' और 'समन्वय'. एल' अस्पताल (के बारे में 1700) लिखा एक महत्वपूर्ण पाठयपुस्तक पर विश्लेषणात्मक ज्यामिति.

क्लैरौट (1729) था पहला को देना दूरी FORMULA हालांकि में बेढंगा रूप. वह भी दिया अवरोधन रूप का रेखीय समीकरण. क्रेमर (1750)

शांकव धारा 207

बनाया औपचारिक उपयोग का दो कुल्हाड़ियों और दिया समीकरण का ए घेरा जैसा

( *य* – *ए* ) 2 + ( *बी* – *एक्स* ) 2 = *आर*

वह दिया श्रेष्ठ प्रदर्शनी का विश्लेषणात्मक ज्यामिति का उसका समय। स्पंज (1781) दिया आधुनिक 'बिंदु-ढलान' रूप का समीकरण का ए रेखा जैसा

*और* – *और* ' = *को* ( *एक्स* – *एक्स* ' )

और स्थिति का खड़ापन का दो पंक्तियां जैसा *आ* '' + 1 = 0.

एस एफ लैक्रोइक्स (1765-1843) था ए उर्वर पाठयपुस्तक लेखक, लेकिन उसका योगदान

को विश्लेषणात्मक ज्यामिति हैं मिला बिखरा हुआ। वह दिया 'दो-बिंदु' रूप का समीकरण का ए रेखा जैसा

*य – बी* = *बी* ' *– बी* ( *एक्स – ए* )

*ए* ' *ए*

( *बी ० ए – बी* )

और यह लंबाई की से लंबवत ( α , β ) पर *य* = *कुल्हाड़ी* + *बी* जैसा

1 +2 . \_

उसका FORMULA के लिए खोज कोण बीच में दो पंक्तियां था टैन θ

=  " *– ए* 

 

 1 +  . It is, of*aa*

अवधि, चौंका देने वाला वह एक है को इंतज़ार के लिए अधिक बजाय 150 साल बाद आविष्कार का विश्लेषणात्मक ज्यामिति पहले खोज ऐसा आवश्यक बुनियादी सूत्र. में 1818, सी।

लेम, एक सिविल इंजीनियर, ने से गुजरने वाले वक्र के रूप में *m* E + *m* ' E ' = 0 दिया अंक का चौराहा का दो लोकी इ = 0 और इ ' = 0.

अनेक महत्वपूर्ण खोजें, दोनों में अंक शास्त्र और विज्ञान, पास होना गया

जुड़े हुए को शंकुधर अनुभाग. यूनानियों विशेष रूप से आर्किमिडीज (287-212 बीसी) और अपोलोनियस (200 ईसा पूर्व) ने अपनी सुंदरता के लिए शंकु वर्गों का अध्ययन किया। इन घटता हैं महत्वपूर्ण औजार के लिए उपस्थित दिन अन्वेषण का आउटर अंतरिक्ष और भी के लिए अनुसंधान में व्यवहार का परमाणु कण.

— **�** —

208 MATHEMATICS

## अध्याय 11

INTRODUCTION TO THREE DIMENSIONAL GEOMETRY

वी *गणित है दोनों रानी और हाथ से बनी लड़की का सभी विज्ञान – एट बेल* वी

#### परिचय

आप मई याद करना वह को का पता लगाने पद का ए बिंदु में ए विमान, हम ज़रूरत दो अन्तर्विभाजक परस्पर सीधा पंक्तियां में विमान। इन पंक्तियां हैं बुलाया *कोआर्डिनेट कुल्हाड़ियों* और दो नंबर हैं बुलाया *COORDINATES का बिंदु साथ आदर को कुल्हाड़ियाँ* । में वास्तविक ज़िंदगी, हम करना नहीं पास होना को सौदा साथ अंक झूठ बोलना में ए विमान केवल। के लिए उदाहरण, विचार करना पद का ए गेंद फेंक दिया में अंतरिक्ष पर अलग अंक का समय या पद का एक विमान जैसा यह मक्खियों से एक जगह को एक और पर अलग टाइम्स दौरान इसका उड़ान। इसी प्रकार, अगर हम थे को का पता लगाने पद का सबसे कम बख्शीश का एक इलेक्ट्रिक बल्ब फांसी से छत का ए

लियोनहार्ड यूलर (1707-1783)

कमरे या कमरे में छत पंखे के केंद्रीय सिरे की स्थिति, हम न केवल करेंगे ज़रूरत होना सीधा दूरी का बिंदु को होना स्थित से दो सीधा दीवारों का कमरा लेकिन भी ऊंचाई का बिंदु से ज़मीन का कमरा। इसलिए, हमें न केवल दो बल्कि तीन संख्याओं की आवश्यकता है जो लंबवत दूरियों का प्रतिनिधित्व करती हैं बिंदु से तीन परस्पर सीधा विमान, अर्थात् ज़मीन का कमरा और कमरे की दो अगल-बगल दीवारें. तीन संख्याएँ तीन दूरियों का प्रतिनिधित्व करती हैं हैं बुलाया *COORDINATES का बिंदु साथ संदर्भ को तीन कोआर्डिनेट विमान* . तो, अंतरिक्ष में एक बिंदु के तीन निर्देशांक होते हैं। इस अध्याय में हम इसका अध्ययन करेंगे बुनियादी अवधारणाओं का ज्यामिति में तीन आकार अंतरिक्ष।\*

\* त्रि-आयामी ज्यामिति में विभिन्न गतिविधियों के लिए कोई भी व्यक्ति " *ए हैंड बुक फॉर " पुस्तक का संदर्भ ले सकता है गणित प्रयोगशाला डिजाइन करना स्कूल्स में"* , एनसीईआरटी, 2005.

परिचय को तीन आयामी ज्यामिति 209

#### कोआर्डिनेट कुल्हाड़ियों और कोआर्डिनेट विमान में तीन आकार अंतरिक्ष

एक बिंदु O पर प्रतिच्छेद करने वाले तीन विमानों पर विचार करें ऐसा वह ये तीन विमान हैं परस्पर सीधा को प्रत्येक अन्य (अंजीर 11.1). इन



तीन विमान इंटरसेक्ट साथ में पंक्तियां एक्स ' ओएक्स, वाई '' ओए और Z ′ OZ, क्रमशः *x* , *y* और *z* - *अक्ष कहलाते हैं।* हम मई टिप्पणी वह इन पंक्तियां हैं परस्पर

सीधा को प्रत्येक अन्य। इन पंक्तियां गठित करना आयताकार *समन्वय प्रणाली* . समतल क्रमशः XOY, YOZ और ZOX कहलाते हैं XY- *विमान* , YZ- *विमान* और ZX- *विमान* , हैं

ज्ञात जैसा तीन कोआर्डिनेट विमान. हम लेना XOY विमान जैसा विमान का कागज़ और

अंजीर 11.1

रेखा Z ′ OZ समतल XOY के लंबवत है। यदि कागज के तल पर विचार किया जाए क्षैतिज के रूप में, तो रेखा Z'OZ ऊर्ध्वाधर होगी। से मापी गई दूरियाँ OZ की दिशा में ऊपर की ओर XY-प्लेन को सकारात्मक माना जाता है और उन्हें मापा जाता है OZ ' की दिशा में नीचे की ओर जाने को ऋणात्मक माना जाता है। इसी प्रकार, दूरी OY के साथ ZX-प्लेन के दाईं ओर मापा गया, बाईं ओर सकारात्मक माना जाता है ZX-तल और OY के अनुदिश ' नकारात्मक के रूप में, YZ-तल के सामने OX के अनुदिश धनात्मक के रूप में और इसके पीछे OX ' के साथ ऋणात्मक के रूप में। बिंदु O को *मूल बिंदु* कहा जाता है कोआर्डिनेट प्रणाली। तीन कोआर्डिनेट विमान विभाजित करना अंतरिक्ष में आठ पार्ट्स ज्ञात *अष्टांश* के रूप में । इन अष्टांशों को XOYZ, X ' OYZ, X ' OY ' Z, XOY ' Z, XOYZ ' नाम दिया जा सकता है । एक्स ' ओयज़ ' , एक्स ' ओए ' जेड ' और XOY ' Z ' . और लक्षित द्वारा मैं, द्वितीय, तृतीय, ..., आठवीं , क्रमश।

#### COORDINATES का ए बिंदु में अंतरिक्ष

में एक निश्चित समन्वय प्रणाली को चुनने के बाद निर्देशांक अक्षों से युक्त अंतरिक्ष, निर्देशांक समतल और उत्पत्ति, अब हम बताते हैं कि कैसे, दिया गया ए बिंदु में अंतरिक्ष, हम संबंद्ध करना साथ यह तीन निर्देशांक ( *x,y,z* ) और इसके विपरीत, एक त्रिक दिया गया है का तीन नंबर ( *एक्स, हाँ, जेड* ), कैसे, हम का पता लगाने ए बिंदु में अंतरिक्ष।

दिया गया ए बिंदु पी में अंतरिक्ष, हम बूँद ए

सीधा बजे पर XY विमान साथ एम जैसा

अंजीर 11.2

पैर का यह सीधा (अंजीर 11.2). तब, से बिंदु एम, हम खींचना ए सीधा एमएल को *एक्स-* अक्ष पर, इसे एल पर मिलाते हुए। मान लीजिए कि ओएल *एक्स है* , एलएम *वाई है* और एमपी *जेड है।* फिर *x,y* और *z* हैं बुलाया *एक्स* , *य* और *जेड निर्देशांक* , क्रमश, का बिंदु पी में अंतरिक्ष। में अंजीर 11.2, हम मई टिप्पणी वह बिंदु पी ( *एक्स* , *हाँ* , *z* ) झूठ में ओक्टांट XOYZ और इसलिए सभी *एक्स* , *हाँ* , *जेड* हैं सकारात्मक। अगर पी था में कोई अन्य अष्टक, लक्षण का *एक्स* , *य* और *जेड* चाहेंगे परिवर्तन

210 गणित

इसलिए। इस प्रकार, अंतरिक्ष में प्रत्येक बिंदु P पर एक क्रमित त्रिक होता है ( *एक्स* , *हाँ* , *z* ) का असली नंबर.

इसके विपरीत, दिया गया कोई त्रिक ( *एक्स* , *हाँ* , *जेड* ), हम चाहेंगे पहला हल करना बिंदु एल पर *एक्स* -अक्ष *x* के अनुरूप , फिर XY-तल में बिंदु M का पता लगाएं जैसे कि ( *x* , *y* ) हैं XY-तल में बिंदु M के निर्देशांक। ध्यान दें कि एलएम लंबवत है *एक्स-* अक्ष या है समानांतर को *y* -अक्ष. होना पहुँच गया बिंदु एम, हम खींचना ए सीधा XY-तल को MP करें और उस पर *z के संगत बिंदु P का पता लगाएं* । बिंदु P तो प्राप्त किया है तब COORDINATES ( *एक्स* , *हाँ* , *z* ). इस प्रकार, वहाँ है ए एक को एक पत्र-व्यवहार बीच में अंक में अंतरिक्ष और आदेश दिया त्रिक ( *एक्स* , *हाँ* , *z* ) का असली नंबर.

वैकल्पिक रूप से, बिंदु P के माध्यम से अंतरिक्ष, हम समानांतर तीन विमान बनाते हैं *x-* अक्ष, *y-* अक्ष से मिलने वाले तलों का समन्वय करें और *z* -अक्ष में अंक ए, बी और सी, क्रमश: (चित्र 11.3)। मान लीजिए OA = *x* , OB = *y* और OC = *z है* । तब, बिंदु पी इच्छा पास होना COORDINATES *एक्स* , *य* और *जेड* और हम लिखना पी ( *एक्स* , *हाँ* , *z* ). इसके विपरीत, दिया गया *x* , *y* और *z* , हम तीन बिंदुओं A, B और का पता लगाते हैं तीन समन्वय अक्षों पर C. के माध्यम से बिंदु A, B और C के समानांतर हम विमान बनाते हैं YZ-विमान, ZX-विमान और XY-प्लेन,

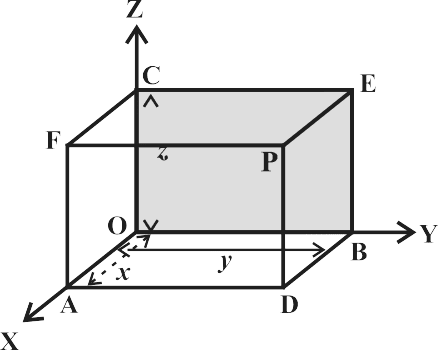


Fig 11.3

क्रमश। इन तीन तलों अर्थात् एडीपीएफ, बीडीपीई के प्रतिच्छेदन का बिंदु और CEPF स्पष्ट रूप से बिंदु P है, जो क्रमित त्रिक ( *x* , *y* , *z* ) के अनुरूप है। हम देखें कि यदि P ( *x* , *y* , *z* ) अंतरिक्ष में कोई बिंदु है, तो *x* , *y* और *z* लंबवत हैं दूरी से YZ, ZX और XY विमान, क्रमश।

on the *x*-axis will be as (*x*,0,0) and the coordinates of any point in the YZ-plane will be as (0, *y*, *z*).

�Note The coordinates of the origin O are (0,0,0). The coordinates of any point

*टिप्पणी*  संकेत का COORDINATES का ए बिंदु ठानना ओक्टांट में कौन बिंदु झूठ। अगले मेज़ दिखाता है लक्षण का COORDINATES में आठ अष्टक.

मेज़ 11.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | मैं | द्वितीय | तृतीय | चतुर्थ | वी | छठी | सातवीं | आठवीं |
| *एक्स* | + | – | – | + | + | – | – | + |
| *य* | + | + | – | – | + | + | – | – |
| *जेड* | + | + | + | + | – | – | – | – |

परिचय को तीन आयामी ज्यामिति 211

उदाहरण 1 में अंजीर 11.3, अगर पी है (2,4,5), खोजो COORDINATES का एफ।

समाधान के लिए बिंदु एफ, दूरी मापा साथ में ओए है शून्य। इसलिए, COORDINATES का एफ हैं (2,0,5).

उदाहरण 2 खोजो में अष्टक जो अंक (-3,1,2) और (–3,1,– 2) झूठ।

समाधान से टेबल 11.1, बिंदु (-3,1, 2) झूठ में दूसरा ओक्टांट और बिंदु (-3, 1,- 2) में निहित है अष्टक VI.

EXERCISE 11.1

1. ए बिंदु है पर *एक्स* -एक्सिस। क्या हैं इसका *y* -समन्वय और *z* -निर्देशांक?
2. ए बिंदु है में XZ-विमान। क्या कर सकना आप कहना के बारे में इसका *y-* समन्वय?
3. नाम अष्टक में कौन अगले अंक झूठ:

(1, 2, 3), (4, -2, 3), (4, -2, –5), (4, 2, –5), (- 4, 2, –5), (- 4, 2, 5),

(-3, –1, 6) (- 2, – 4, –7).

1. भरना में रिक्त स्थान:
   1. *एक्स* -अक्ष और *y* -अक्ष लिया एक साथ ठानना ए विमान ज्ञात जैसा ।
   2. COORDINATES का अंक में XY विमान हैं का रूप ।
   3. कोआर्डिनेट विमान विभाजित करना अंतरिक्ष अष्टांशों में .

#### दूरी बीच में दो अंक

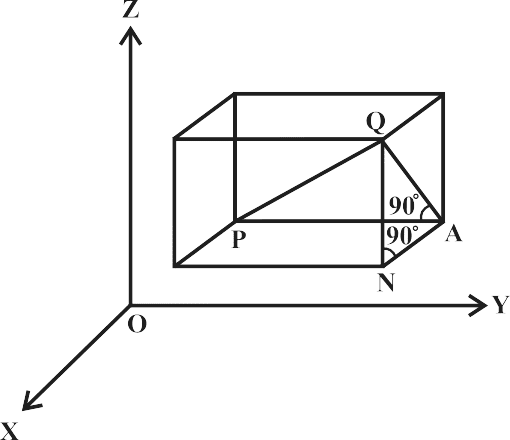


Fig 11.4

हम पास होना अध्ययन के बारे में दूरी द्वि-आयामी में दो बिंदुओं के बीच कोआर्डिनेट प्रणाली। होने देना हम अब बढ़ाना यह अध्ययन को तीन आयामी प्रणाली।

माना P( *x* 1 , *y* 1 , *z* 1 ) और क्यू ( *x* 2 , *y* 2 , *z* 2 ) की एक प्रणाली को संदर्भित दो बिंदु हो आयताकार कुल्हाड़ियों बैल, ओए और आस्ट्रेलिया. बिंदु P और Q से होकर विमान खींचिए निर्देशांक तलों के समानांतर ताकि रूप ए आयताकार समानान्तर चतुर्भुज साथ एक विकर्ण पी क्यू (अंजीर 11.4).

अब चूँकि ∠PAQ एक अधिकार है कोण, यह इस प्रकार वह, में त्रिकोण PAQ,

पीक्यू 2 = पीए 2 + एक्यू 2  ... (1)

भी, त्रिकोण ANQ है सही कोण त्रिकोण साथ ∠ ANQ ए सही कोण।

212 गणित

अतः AQ 2 = एएन 2 + एनक्यू 2  ... (2) 1 से ) और (2), हम पास होना

पीक्यू 2 = पीए 2 + एएन 2 + एनक्यू 2

अब पीए = *य* 2 – *य* 1 , एक = *एक्स* 2 – *एक्स* 1 और एनक्यू = *z* 2 – *z* 1

1

2

1

2

अतः PQ 2 = ( *एक्स*

2

– *एक्स* ) 2 + ( *य*

– *य* 1 ) + ( *z* 2

– *जेड* ) 2

इसलिए पीक्यू =

(*x*2 −*x*1)2 +( *y*2 −*y*1 )2+(*z*2 −*z*1 )2

यह देता है हम दूरी बीच में दो अंक ( *एक्स* 1 , *य* 1 , *जेड* 1 ) और ( *एक्स* 2 , *य* 2 , *z* 2 ).

में विशिष्ट, अगर *एक्स* 1 = *य* 1 = *z* 1 = 0, अर्थात, बिंदु पी है मूल हे, तब OQ = , कौन देता है दूरी बीच में मूल हे और कोई बिंदु क्यू ( *एक्स* 2 , *य* 2 , *z* 2 ).

*x*2 + *y*2 +*z*2

2 2 2

उदाहरण 3 खोजो दूरी बीच में अंक पी(1, -3, 4) और क्यू (- 4, 1, 2).

समाधान दूरी पी क्यू बीच में अंक पी (1,–3, 4) और क्यू (- 4, 1, 2) है पी क्यू =

(−4 −1)2 + (1 + 3)2 + (2 − 4)2

25 + 16 + 4

=

== \_ 3

45



5

इकाइयां

उदाहरण 4 दिखाओ वह अंक पी (-2, 3, 5), क्यू (1, 2, 3) और आर (7, 0, –1) हैं संरेख.

समाधान हम जानना वह अंक हैं कहा होना समरेख अगर वे झूठ बोलते हैं पर एक पंक्ति.

अब, पीक्यू = QR =

(7 + 2)2 + (0 − 3)2 + (−1− 5)2

और पीआर =

== \_

=== \_ \_ 2

(1 + 2)2+ (2 − 3)2 + (3 − 5)2

9 +1 + 4

14

(7 −1)2+ (0 − 2)2 + (−1− 3)2

36 + 4 + 16

56

14

=== \_ \_ 3

81 + 9 + 36

126

14

इस प्रकार, पी क्यू + QR = पीआर. इस तरह, पी, क्यू और आर हैं संरेख.

उदाहरण 5 हैं अंक ए (3, 6, 9), बी (10, 20, 30) और सी (25, – 41, 5), कोने का ए सही कोणीय त्रिकोण?

समाधान दूरी सूत्र द्वारा, हमारे पास है एबी 2 = (10 – 3) 2 + (20 – 6) 2 + (30 – 9) 2

= 49 + 196 + 441 = 686

ईसा पूर्व 2 = (25 – 10) 2 + (- 41 – 20) 2 + (5 – 30) 2

= 225 + 3721 + 625 = 4571

परिचय को तीन आयामी ज्यामिति 213

CA2 = \_ (3 - 25) 2 + (6 + 41) 2 + (9 - 5) 2

= 484 + 2209 + 16 = 2709

हम खोजो वह सीए 2 + एबी 2 ≠ ईसा पूर्व 2 .

इस तरह, त्रिकोण एबीसी है नहीं ए सही कोणीय त्रिकोण.

उदाहरण 6 खोजो समीकरण का तय करना का अंक पी ऐसा वह पीए 2 + पीबी 2 = 2 *के* 2 , कहाँ ए और बी क्रमशः बिंदु (3, 4, 5) और (-1, 3, -7) हैं।

समाधान होने देना COORDINATES का बिंदु पी होना ( *एक्स* , हाँ, z). यहां पीए 2 = ( *एक्स* – 3) 2 + ( *य* – 4) 2 + ( *जेड* – 5) 2

पीबी 2 = ( *एक्स* + 1) 2 + ( *य* – 3) 2 + ( *z* + 7) 2

द्वारा दिया गया स्थिति पीए 2 + पीबी 2 = 2 *के* 2 , हम पास होना

( *एक्स* – 3) 2 + ( *य* – 4) 2 + ( *z* – 5) 2 + ( *एक्स* + 1) 2 + ( *य* – 3) 2 + ( *z* + 7) 2 = 2 *के* 2 यानी, 2 *x* 2 + 2 *य* 2 + 2 *z* 2 – 4 *एक्स* – 14 *वर्ष* + 4 *ज़ेड* = 2 *के* 2 – 109.

EXERCISE 11.2

1. खोजो दूरी बीच में अगले जोड़े का अंक:

(मैं) (2, 3, 5) और (4, 3, 1) (ii) (-3, 7, 2) और (2, 4, –1)

(iii) (-1, 3, – 4) और (1, -3, 4) (iv) (2, -1, 3) और (-2, 1, 3).

1. दिखाओ वह अंक (-2, 3, 5), (1, 2, 3) और (7, 0, –1) हैं संरेख.
2. सत्यापित करें अगले:
   1. (0, 7, –10), (1, 6, – 6) और (4, 9, – 6) हैं कोने का एक समद्विबाहु त्रिकोण.
   2. (0, 7, 10), (-1, 6, 6) और (- 4, 9, 6) हैं कोने का ए सही कोणीय त्रिकोण.
   3. (-1, 2, 1), (1, -2, 5), (4, -7, 8) और (2, -3, 4) हैं कोने का ए समांतर चतुर्भुज
3. खोजो समीकरण का तय करना का अंक कौन हैं समान दूरी से अंक (1, 2, 3) और (3, 2, –1).
4. का समीकरण ज्ञात कीजिये बिंदु P का समुच्चय, जिसकी दूरियों का योग ए (4, 0, 0) और बी (- 4, 0, 0) है 10 के बराबर.

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 7 दिखाओ वह अंक ए (1, 2, 3), बी (-1, -2, –1), सी (2, 3, 2) और डी (4, 7, 6) हैं कोने का ए चतुर्भुज ए बी सी डी, लेकिन यह है नहीं ए आयत।

समाधान को दिखाओ ए बी सी डी है ए चतुर्भुज हम ज़रूरत को दिखाओ विलोम ओर हैं बराबर टिप्पणी वह।

214 गणित

अब =

ईसा पूर्व =

सीडी =

== \_ 6

== \_

(−1 −1)2+(−2 − 2)2+(−1 − 3)2

4 + 16 + 16

(2 + 1)2 +(3 + 2)2 +(2 + 1)2

9 + 25 + 9



43

== \_ 6

(4 − 2)2+(7 − 3)2 +(6 − 2)2

4 + 16 +16

(1 − 4)2 +(2 − 7)2+(3 − 6)2

और =

= 9 + 25 + 9 =

तब से अब = सीडी और ईसा पूर्व = एडी, ए बी सी डी है ए समांतर चतुर्भुज

43

अब, यह है आवश्यक को सिद्ध करना वह ए बी सी डी है नहीं ए आयत। के लिए यह, हम दिखाओ वह विकर्णों एसी और बी.डी हैं असमान. हम पास होना

एसी =

(2 −1)2 +(3 − 2)2+(2 − 3)2

बीडी =

(4 +1)2+(7 + 2)2 +(6 + 1)2

तब से एसी ≠ बीडी, ए बी सी डी है नहीं आयत।

= 1 +1 \_ + 1 =

= 25 + 81 + 49 =

3

155 .

�Note We can also show that ABCD is a parallelogram, using the property that

diagonals AC and BD bisect each other.

उदाहरण 8 खोजो समीकरण का तय करना का अंक पी ऐसा वह इसका दूरी से अंक ए (3, 4, –5) और बी (- 2, 1, 4) बराबर हैं।

समाधान अगर पी ( *एक्स* , *हाँ* , *z* ) होना कोई बिंदु ऐसा वह देहात = पंजाब.

अब या

=

#### ( *एक्स* − 3) 2 + ( *य* − 4) 2 + ( *जेड* +5 ) 2 =

(*x* − 3)2 + ( *y* − 4)2 + (*z* + 5)2

(*x* + 2)2+ ( *y* −1)2 + (*z* − 4)2

( *एक्स* + 2) 2 + ( *य* − 1) 2 + ( *z* − 4) 2

या 10 + 6 *साल* – 18 *ज़ेड* – 29 = 0.

उदाहरण 9 त्रिभुज ABC का केन्द्रक बिंदु (1, 1, 1) पर है। यदि निर्देशांक A और B के क्रमशः (3, -5, 7) और (-1, 7, - 6) हैं, के निर्देशांक ज्ञात कीजिए बिंदु सी।

समाधान होने देना COORDINATES का सी होना ( *एक्स* , *हाँ* , *z* ) और COORDINATES का केन्द्रक जी होना (1, 1, 1). तब

परिचय को तीन आयामी ज्यामिति 215

3 1 = 1 , यानी, = 1; *य*

#### 3

5 7 = 1 , अर्थात, *य* = 1;

#### 3

7 6 = 1 , अर्थात, *जेड* = 2.

#### 3

इस तरह, COORDINATES का सी हैं (1, 1, 2).

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 11

1. तीन कोने का ए चतुर्भुज ए बी सी डी हैं ए(3, – 1, 2), बी (1, 2, – 4) और सी (- 1, 1, 2). खोजो COORDINATES का चौथी शिखर.
2. खोजो लंबाई का माध्यिकाओं का त्रिकोण साथ कोने ए (0, 0, 6), बी (0,4, 0) और (6, 0, 0).
3. अगर मूल है केन्द्रक का त्रिकोण पीक्यूआर साथ कोने पी (2 *ए* , 2, 6), क्यू (- 4, 3 *बी* , –10) और आर(8, 14, 2 *सी* ), तब खोजो मान क , *ख \_* और *सी* ।
4. अगर ए और बी होना अंक (3, 4, 5) और (-1, 3, –7), क्रमश, खोजो समीकरण का तय करना का अंक पी ऐसे वह पीए 2 + पीबी 2 = *के* 2 , कहाँ *क* है ए स्थिर।

*सारांश*

- तीन आयामों में , एक आयताकार कार्तीय निर्देशांक के निर्देशांक अक्ष- नैट प्रणाली हैं तीन परस्पर सीधा पंक्तियाँ. कुल्हाड़ियों हैं बुलाया *एक्स* , *य* और *z* -अक्ष।

अक्षों के युग्म द्वारा निर्धारित तीन तल निर्देशांक तल हैं, XY कहा जाता है, YZ और ZX- *विमान* .

� द तीन कोआर्डिनेट विमान विभाजित करना अंतरिक्ष में आठ पार्ट्स ज्ञात जैसा *अष्टक* .

त्रिविमीय ज्यामिति में बिंदु P के निर्देशांक हमेशा लिखे जाते हैं में रूप का त्रिक पसंद ( *एक्स, हाँ, z* ). यहाँ *एक्स, य* और *जेड* हैं दूरी से

YZ, ZX और XY *-* विमान।

* (मैं) कोई बिंदु पर *एक्स* -अक्ष है का रूप ( *एक्स* , 0, 0)

1. कोई बिंदु पर *y* -अक्ष है का रूप (0, *हाँ* , 0)
2. कोई बिंदु पर *z* -अक्ष है का रूप (0, 0, *z* ).

दूरी बीच में दो अंक पी( *एक्स* 1 , *य* 1 , *जेड* 1 ) और क्यू ( *एक्स* 2 , *य* 2 , *जेड* 2 ) है दिया गया द्वारा

पीक्यू =

*( एक्स* 2 − *एक्स* 1 *)* 2 + *( y2* \_ − *y1* \_ *)* 2 + *(* z2 − *z* 1 *)* 2

216 गणित

*Historical Note*

Rene’ Descartes (1596–1650), the father of analytical geometry, essentially dealt with plane geometry only in 1637. The same is true of his co-inventor Pierre Fermat (1601-1665) and La Hire (1640-1718). Although suggestions for the three dimensional coordinate geometry can be found in their works but no details. Descartes had the idea of coordinates in three dimensions but did not develop it. J.Bernoulli (1667-1748) in a letter of 1715 to Leibnitz introduced the three coor- dinate planes which we use today. It was Antoinne Parent (1666-1716), who gave a systematic development of analytical solid geometry for the first time in a paper presented to the French Academy in 1700.

L.Euler (1707-1783) took up systematically the three dimensional coordinate ge- ometry, in Chapter 5 of the appendix to the second volume of his “Introduction to Geometry” in 1748.

It was not until the middle of the nineteenth century that geometry was extended to more than three dimensions, the well-known application of which is in the Space-Time Continuum of Einstein’s Theory of Relativity.

— **वी** —

## अध्याय 12

LIMITSAND DERIVATIVES

� के साथ *गणना जैसा ए चाबी, अंक शास्त्र हो सकता है सफलतापूर्वक लागू को स्पष्टीकरण का अवधि का प्रकृति – व्हाइटहेड* �

#### परिचय

यह अध्याय है एक परिचय को पथरी. गणना है वह शाखा का अंक शास्त्र कौन मुख्य रूप से सौदा साथ अध्ययन किसी फ़ंक्शन के मान में बिंदुओं के रूप में परिवर्तन का कार्यक्षेत्र परिवर्तन। पहला, हम देना एक सहज ज्ञान युक्त विचार का यौगिक (बिना वास्तव में परिभाषित यह)। तब हम देना ए अनुभवहीन परिभाषा सीमा का और सीमा के कुछ बीजगणित का अध्ययन करें। फिर हम आते हैं व्युत्पन्न की परिभाषा पर वापस जाएँ और कुछ बीजगणित का अध्ययन करें का व्युत्पन्न। हम भी प्राप्त डेरिवेटिव का निश्चित मानक कार्य.

#### सहज ज्ञान युक्त विचार का संजात

भौतिक प्रयोगों पास होना की पुष्टि वह शरीर गिरा दिया से ए लंबा टीला कवर ए दूरी का 4.9 *टी* 2 एम-eters में *टी* सेकंड,

महोदय इस्साक न्यूटन (1642-1727)

अर्थात, दूरी *एस* में एम-eters ढका हुआ द्वारा शरीर जैसा ए समारोह का समय *टी* में सेकंड है दिया गया द्वारा *एस* = 4.9 *टी* 2 *.*

साथ लगा हुआ मेज़ 13.1 देता है दूरी कूच में एम-eters पर विभिन्न अंतराल का समय में सेकंड का ए शरीर गिरा दिया से ए लंबा टीला।

उद्देश्य है को खोजें का वेग शरीर पर समय *टी* = 2 सेकंड से यह डेटा। इस समस्या से निपटने का एक तरीका विभिन्न के लिए औसत वेग ज्ञात करना है *t = 2 सेकंड* पर समाप्त होने वाले समय के अंतराल और आशा है कि ये इस पर कुछ प्रकाश डालेंगे वेग *टी* पर= 2 सेकंड.

औसत वेग बीच में *टी* = *टी* 1 और *टी = टी 2* के बराबर होती है दूरी कूच बीच में *टी = टी 1* और *टी = टी 2* सेकंड से विभाजित ( *टी* 2 – *टी* 1 ) *.* अत: पहले में औसत वेग दो सेकंड

218 गणित

दूरी कूच बीच में *टी* = 2 *और टी* = 0

मेज़ 12.1

= 2 1

|  |  |
| --- | --- |
| *t* | *s* |
| 0 | 0 |
| 1 | 4.9 |
| 1.5 | 11.025 |
| 1.8 | 15.876 |
| 1.9 | 17.689 |
| 1.95 | 18.63225 |
| 2 | 19.6 |
| 2.05 | 20.59225 |
| 2.1 | 21.609 |
| 2.2 | 23.716 |
| 2.5 | 30.625 |
| 3 | 44.1 |
| 4 | 78.4 |

समय मध्यान्तर ( *टी* 2 − *टी* 1 )

= ( 19.6 − 0 ) *एम* = 9.8 / *एस* .

( 2 − 0 ) *एस*

इसी प्रकार, औसत वेग बीच में *टी =* 1 और *टी* = 2 है

( 19.6 – 4.9 )

( 2 - 1 )

= 14.7 *एमएस* \_ *\_*

इसी प्रकार हम औसत वेग की गणना करते हैं बीच में *टी* = *टी* 1 और *टी* = 2 के लिए विभिन्न *टी* 1 . अगले तालिका 13.2 में औसत वेग ( *v* ), *t* = *t* 1 दिया गया है सेकंड और *टी* = 2 सेकंड.

मेज़ 12.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *टी* 1 | 0 | 1 | 1.5 | 1.8 | 1.9 | 1.95 | 1.99 |
| *वी* | 9.8 | 14.7 | 17.15 | 18.62 | 19.11 | 19.355 | 19.551 |

तालिका 12.2 से, हम देखते हैं कि औसत वेग धीरे-धीरे बढ़ रहा है। जैसा हम बनाना समय अंतराल समापन पर *टी* = 2 छोटा, हम देखना वह हम पाना ए बेहतर विचार *टी = 2* पर वेग का। आशा है कि 1.99 के बीच वास्तव में कुछ भी नाटकीय नहीं होगा सेकंड और 2 सेकंड, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि *t* = 2 सेकंड पर औसत वेग उचित है ऊपर 19.551 *मी* / *से* .

यह निष्कर्ष है कुछ हद तक मजबूत द्वारा अगले तय करना का गणना. गणना करना औसत वेग के लिए विभिन्न समय अंतराल शुरुआत पर *टी* = 2 सेकंड. जैसा पहले औसत वेग *वी* बीच में *टी* = 2 सेकंड और *टी* = *टी* 2 सेकंड है

= दूरी कूच 2 के बीच सेकंड और *टी* 2 सेकंड

*टी* 2 − 2

= दूरी कूच में *टी* 2 सेकंड − दूरी कूच में 2 सेकंड

*टी* 2 − 2

सीमा और व्युत्पन्न 219

= दूरी में यात्रा की *टी* 2 सेकंड 19.6

*टी* 2 − 2

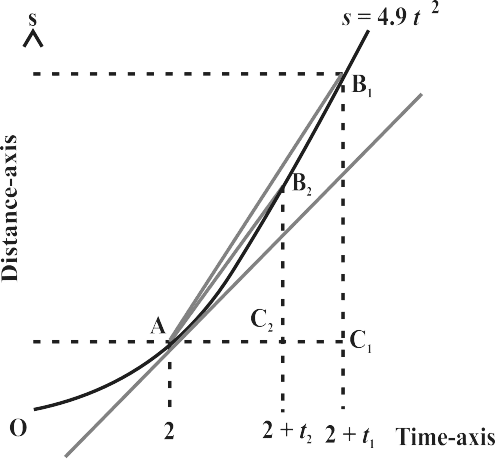
निम्नलिखित तालिका 12.3 औसत वेग *v* मीटर प्रति सेकंड में देती है बीच में *टी* = 2 सेकंड और *टी* 2 सेकंड.

मेज़ 12.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *टी* 2 | 4 | 3 | 2.5 | 2.2 | 2.1 | 2.05 | 2.01 |
| *वी* | 29.4 | 24.5 | 22.05 | 20.58 | 20.09 | 19,845 | 19,649 |

यहाँ दोबारा हम टिप्पणी वह अगर हम लेना छोटे समय अंतराल शुरुआत पर *टी* = 2, हम पाना बेहतर विचार का वेग पर *टी* = 2.

में पहला तय करना का गणना, क्या हम पास होना हो गया है को खोजो औसत वेग में की बढ़ती समय अंतराल समापन पर *टी* = 2 और तब आशा वह कुछ नहीं नाटकीय ह ाेती है अभी पहले *टी* = 2. में दूसरा तय करना का गणना, हम पास होना मिला औसत वेग घटते में समय अंतराल समापन पर *टी* = 2 और तब आशा वह कुछ नहीं नाटकीय *t = 2* के ठीक बाद होता है । विशुद्ध रूप से भौतिक आधार पर, औसत के ये दोनों क्रम वेग अवश्य दृष्टिकोण ए सामान्य सीमा. हम कर सकना सुरक्षित रूप से निष्कर्ष वह वेग का *t* = 2 पर वस्तु 19.551 *m/s* और 19.649 *m/s के बीच है* । तकनीकी रूप से, हम कहते हैं कि तात्कालिक वेग पर *टी* = 2 है बीच में 19.551 *एमएस* और 19.649 *एमएस* । जैसा है सर्वविदित है, *वेग विस्थापन के परिवर्तन की दर है* । इसलिए हमारे पास क्या है समाप्त है अगले। से दिया गया डेटा का दूरी ढका हुआ पर विभिन्न समय क्षण हम की दर का अनुमान लगाया है



परिवर्तन का दूरी पर ए दिया गया तुरंत समय की। हम कहते हैं कि की *व्युत्पत्ति* दूरी फलन *s* = 4.9 *t* 2 पर *t* = 2 है बीच में 19.551 और 19.649.

एक वैकल्पिक रास्ता का को देखने यह सीमित प्रक्रिया है दिखाया में अंजीर 12.1. यह है ए कथानक का दूरी *एस* का शरीर से शीर्ष का टीला बनाम समय *यह* बीत गया. सीमा में यथा क्रम का समय अंतराल *ज* 1 , *ज* 2 , ..., दृष्टिकोण

शून्य, अनुक्रम का औसत वेग

दृष्टिकोण वही आप LIMIT जैसा करता है

अनुक्रम का अनुपात चित्र 12.1

220 गणित

सी 1 बी 1 , C2 \_ बी2 \_ ,

C3B3 \_ \_ \_

*...*

एसी 1 एसी 2

एसी 3

कहाँ सी 1 बी 1 = *एस* 1 – *स* 0 है दूरी कूच द्वारा शरीर में समय मध्यान्तर *ज* 1 = एसी 1 , आदि। चित्र 12.1 से यह निष्कर्ष निकालना सुरक्षित है कि यह बाद वाला क्रम निकट आता है ढलान का स्पर्शरेखा को वक्र पर बिंदु एक। में अन्य शब्द, तात्कालिक वेग *वी* ( *टी* ) का ए शरीर पर समय *टी* = 2 है बराबर को ढलान का स्पर्शरेखा का वक्र *एस* = 4.9 *टी* 2 पर *टी* = 2.

#### सीमाएं

ऊपर बहस स्पष्ट रूप से अंक की ओर तथ्य वह हम ज़रूरत को समझना सीमा- इंग प्रक्रिया में ग्रेटर स्पष्टता. हम अध्ययन ए कुछ उदाहराणदर्शक उदाहरण को पाना कुछ परिवार- iarity साथ अवधारणा का सीमाएं.

फ़ंक्शन *f* ( *x* ) = *x* 2 पर विचार करें *।* ध्यान दें कि जैसे ही *x* मान को 0 के बहुत करीब ले जाता है, कीमत का *एफ* ( *एक्स* ) भी चाल की ओर 0 (देखना अंजीर 2.10 अध्याय 2). हम कहना

लिम *एफ* ( *एक्स* ) = 0

*एक्स* → 0

(को होना पढ़ना जैसा आप LIMIT का *एफ* ( *एक्स* ) जैसा *एक्स* आदत को शून्य के बराबर होती है शून्य)। आप LIMIT का *एफ* ( *एक्स* ) जैसा *एक्स* आदत को शून्य है को होना सोचा का जैसा मूल्य *एफ* ( *x* ) चाहिए मान लीजिए पर *एक्स =* 0.

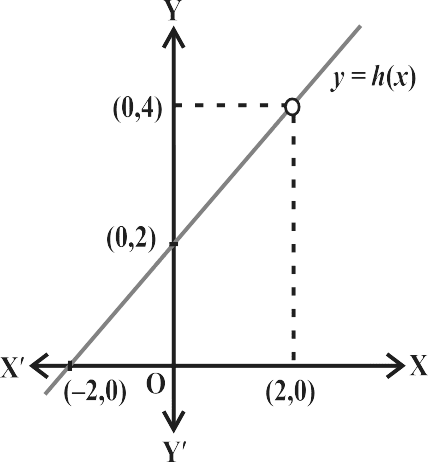
सामान्य तौर पर जैसे *एक्स* → *ए* , *एफ* ( *एक्स* ) → *मैं* , फिर *एल* है बुलाया *आप LIMIT की समारोह एफ* ( *एक्स* ) जो है

प्रतीकात्मक लिखा हुआ जैसा लिम

*x*→*a*

*एफ* ( *एक्स* ) *एल* .

विचार करना अगले समारोह *जी* ( *एक्स* ) = | *एक्स* |, *एक्स*  0. निरीक्षण वह *जी* (0) है नहीं परिभाषित।

कम्प्यूटिंग कीमत का *जी* ( *एक्स* ) के लिए मान का *एक्स* बहुत पास में को 0, हम देखना वह कीमत का *जी* ( *एक्स* ) चाल

की ओर 0. इसलिए, लिम *जी* ( *एक्स* ) = 0. यह है intuitively

*एक्स* 0

स्पष्ट से ग्राफ का *य* = | *एक्स* | के लिए *एक्स* ≠ 0. (देखना चित्र 2.13, अध्याय 2)।

विचार करना अगले समारोह।

*एक्स* 2 − 4

*एच* ( *एक्स* ) - 2x *\_* ≠ 2 *.*

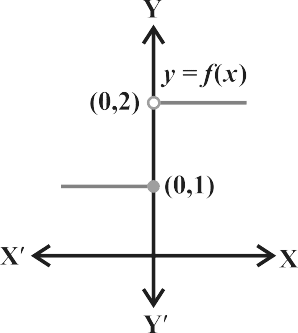
*h* ( *x* ) के मान की गणना करें का *एक्स* बहुत पास में को 2 (लेकिन नहीं पर 2). राजी करना अपने आप को वह सभी इन मान हैं पास में को 4. यह है कुछ हद तक मजबूत द्वारा मानते हुए ग्राफ

का कार्यक्रम *य* = *एच* ( *एक्स* ) दिया गया यहाँ (चित्र 12.2)। अंजीर 12.2

सीमा और डेरिवेटिव 221

इन सभी उदाहरणों में फ़ंक्शन को किसी दिए गए मान पर विचार करना चाहिए बिंदु *एक्स* = *ए* किया नहीं वास्तव में निर्भर करना पर कैसे है *एक्स* प्रवृत्त को *एक।* टिप्पणी वह वहाँ हैं अनिवार्य रूप से दो तरीकों से *x* किसी संख्या *a तक पहुंच सकता है* या तो बाएँ से या दाएँ से, अर्थात् सभी मान *एक्स* कापास में *ए* सकना होना कम बजाय *ए* या सकना होना ग्रेटर बजाय *एक।* यह सहज रूप में नेतृत्व दो सीमाओं तक - *दाएँ हाथ की सीमा* और *बाएँ हाथ की सीमा* । ए के *दाहिने हाथ की सीमा* फ़ंक्शन *f* ( *x ) f* ( *x )* का वह मान है जो *x की* प्रवृत्ति होने पर *f* ( *x* ) के मानों से निर्धारित होता है को *ए* से सही। इसी प्रकार, *बाएं हाथ सीमा* . को उदाहरण देकर स्पष्ट करना यह, विचार करना समारोह

*एफ* ( *एक्स* ) =  1 , *एक्स* ≤ 0

 2 , *x*  0



ग्राफ़ का यह समारोह है दिखाया में अंजीर 12.3. यह है स्पष्ट वह कीमत का *एफ* पर 0 तय द्वारा मान का *एफ* ( *एक्स* ) साथ *एक्स* ≤ 0 के बराबर होती है 1, अर्थात, बाएं हाथ आप LIMIT का *एफ* ( *एक्स* ) पर 0 है

लिम *एफ* ( *एक्स* ) 1

.

*एक्स* → 0

इसी प्रकार, कीमत का *एफ* पर 0 तय द्वारा मान का *x > 0 के साथ f* ( *x* ) 2 के बराबर है, अर्थात, *f* ( *x* ) की दाहिनी ओर की सीमा पर 0 है

लिम *एफ* ( *एक्स* ) 2

.+

*एक्स* → 0

अंजीर 12.3

में यह मामला सही और बाएं हाथ सीमा हैं अलग, और इस तरह हम कहना वह आप LIMIT का *एफ* ( *एक्स* ) जैसा *एक्स* आदत को शून्य करता है नहीं अस्तित्व (यहां तक की यद्यपि समारोह है परिभाषित पर 0).

*Summary*

*x*→*a*

*x* to the left of *a*. This value is called the *left hand limit* of *f* at *a*.

We say lim *f*(*x*) is the expected value of *f* at *x* = *a* given the values of *f* near

*x*→*a*+

*f* near *x* to the right of *a*. This value is called the *right hand limit* of *f*(*x*) at *a*.

If the right and left hand limits coincide, we call that common value as the limit

We say lim *f* ( *x*) is the expected value of *f* at *x* = *a* given the values of

of *f*(*x*) at *x* = *a* and denote it by lim *f*(*x*).

*x*→*a*

उदाहरण 1 फलन *f* ( *x* ) = *x* + 10 पर विचार करें। हम इसकी सीमा ज्ञात करना चाहते हैं *x = 5* पर फ़ंक्शन । आइए 5 के बहुत करीब *x के लिए फ़ंक्शन f* ( *x* ) के मान की गणना करें। कुछ का अंक पास में और को बाएं का 5 हैं 4.9, 4.95, 4.99, 4.995. . ., वगैरह। मान का कार्यक्रम इन बिंदुओं पर नीचे सारणीबद्ध हैं। इसी प्रकार, वास्तविक संख्या 5.001,

222 गणित

5.01, 5.1 हैं भी अंक पास में और को सही का 5. मान का समारोह पर इन अंक हैं भी दिया गया में मेज़ 12.4.

मेज़ 12.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | 4.9 | 4.95 | 4.99 | 4.995 | 5.001 | 5.01 | 5.1 |
| *एफ* ( *एक्स* ) | 14.9 | 14.95 | 14.99 | 14.995 | 15.001 | 15.01 | 15.1 |

से मेज़ 12.4, हम परिणाम निकालना वह कीमत का *एफ* ( *एक्स* ) पर *एक्स =* 5 चाहिए होना ग्रेटर बजाय 14.995 और 15.001 से कम यह मानते हुए कि *x =* 4.995 के बीच कुछ भी नाटकीय नहीं होता है और 5.001. यह मान लेना उचित है कि *x = 5 पर f* ( *x* ) का मान जैसा कि निर्धारित है नंबर को बाएं का 5 है 15, अर्थात,

लिम

*एक्स* → 5 -

*एफ* ( *एक्स* )

15 *.*

इसी प्रकार, कब *एक्स* दृष्टिकोण 5 से सही, *एफ* ( *एक्स* ) चाहिए होना ले रहा कीमत 15, अर्थात,

लिम

*एक्स* → 5+ \_

*एफ* ( *एक्स* )

15 .

इस तरह, यह है संभावित वह बाएं हाथ आप LIMIT का *एफ* ( *एक्स* ) और सही हाथ आप LIMIT का *एफ* ( *एक्स* ) हैं दोनों बराबर को 15. इस प्रकार,

लिम

*एक्स* → 5 −

*एफ* ( *एक्स* )

लिम

*एक्स* → 5+ \_

*एफ* ( *एक्स* ) = लिम

*एक्स* → 5

*एफ* ( *एक्स* ) = 15 .

सीमा 15 के बराबर होने के बारे में यह निष्कर्ष कुछ हद तक मजबूत है देख के ग्राफ का यह समारोह कौन है दिया गया में अंजीर 2.16, अध्याय 2. में यह आकृति, हम लिखते हैं वह जैसा *एक्स* दृष्टिकोण 5 से दोनों में से एक सही या बाएं, ग्राफ का समारोह *एफ* ( *एक्स* ) *= एक्स* +10 दृष्टिकोण बिंदु (5, 15).

हम निरीक्षण वह कीमत का समारोह पर *एक्स =* 5 भी ह ाेती है को होना बराबर को 15.

चित्रण 2 फलन *f* ( *x* ) *= x* 3 पर विचार करें । आइए इसकी सीमा जानने का प्रयास करें *x = 1* पर फ़ंक्शन। पिछले मामले की तरह आगे बढ़ते हुए, हम *f* ( *x* ) का मान सारणीबद्ध करते हैं *एक्स* पास में 1. यह है दिया गया में मेज़ 12.5.

मेज़ 12.5

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
| *एफ* ( *एक्स* ) | 0.729 | 0.970299 | 0.997002999 | 1.003003001 | 1.030301 | 1.331 |

इस तालिका से, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि *x = 1 पर f* ( *x* ) का मान इससे अधिक होना चाहिए 0.997002999 और कम बजाय 1.003003001 मान लिया जाये कुछ नहीं नाटकीय ह ाेती है बीच में

सीमा और डेरिवेटिव 223

*एक्स =* 0.999 और 1.001. यह है उचित को मान लीजिए वह कीमत का *एफ* ( *एक्स* ) पर *एक्स =* 1 जैसा तय द्वारा नंबर को बाएं का 1 है 1, अर्थात,

लिम

*एक्स* → 1 −

*एफ* ( *एक्स* ) 1 .

इसी प्रकार, कब *एक्स* दृष्टिकोण 1 से सही, *एफ* ( *एक्स* ) चाहिए होना ले रहा कीमत 1, अर्थात,

लिम

*एक्स* → 1 +

*एफ* ( *एक्स* ) 1 .

इस तरह, यह है संभावित वह बाएं हाथ आप LIMIT का *एफ* ( *एक्स* ) और सही हाथ आप LIMIT का *एफ* ( *एक्स* ) हैं दोनों बराबर को 1. इस प्रकार,

लिम

*एक्स* → 1 −

*एफ* ( *एक्स* )

लिम

*एक्स* → 1 +

*एफ* ( *एक्स* ) = लिम *एफ* ( *एक्स* ) = 1

*एक्स* → 1

.

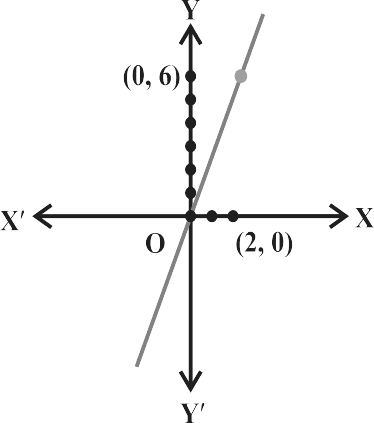
सीमा 1 के बराबर होने के बारे में यह निष्कर्ष कुछ हद तक मजबूत है देख के ग्राफ का यह समारोह कौन है दिया गया में अंजीर 2.11, अध्याय 2. में यह आकृति, हम टिप्पणी वह जैसा *एक्स* दृष्टिकोण 1 से दोनों में से एक सही या बाएं, ग्राफ का समारोह *एफ* ( *एक्स* ) *= एक्स* 3 दृष्टिकोण बिंदु (1, 1).

*x = 1* पर फ़ंक्शन का मान भी होता है बराबर को 1.

चित्रण 3 फलन *f* ( *x* ) *=* 3 *x पर विचार करें* । आइए इसकी सीमा जानने का प्रयास करें समारोह पर *एक्स* = 2. अगले मेज़ 12.6 है अब स्व-व्याख्यात्मक।

मेज़ 12.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | 1.9 | 1.95 | 1.99 | 1.999 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
| *एफ* ( *एक्स* ) | 5.7 | 5.85 | 5.97 | 5.997 | 6.003 | 6.03 | 6.3 |

पहले की तरह हम इसे *x के रूप में देखते हैं* दृष्टिकोण 2 बाएँ या दाएँ से, *f* ( *x )* का मान प्रतीत होता है दृष्टिकोण 6. हम अभिलेख यह जैसा

लिम

*एक्स* → 2 −

*एफ* ( *एक्स* )

लिम

*एक्स* → 2 +

*एफ* ( *एक्स* ) = लिम *एफ* ( *एक्स* ) = 6

*एक्स* → 2

तथ्य।

इसका ग्राफ दिखाया में अंजीर 12.4 मजबूत यह

यहाँ दोबारा हम टिप्पणी वह कीमत का समारोह

पर *एक्स* = 2 मेल खाता है साथ आप LIMIT पर *एक्स* = 2.

चित्रण 4 विचार करना स्थिर समारोह

*एफ* ( *एक्स* ) = 3. होने देना हम कोशिश को खोजो इसका आप LIMIT पर *एक्स =* 2. यह

समारोह प्राणी स्थिर समारोह लेता है वही चित्र 12.4

224 गणित

कीमत (3, में इस मामले में) हर जगह, यानी, इसका कीमत बिंदुओं पर बंद करना से 2 है 3. इस तरह

लिम *एफ* ( *एक्स* )

*एक्स* → 2

लिम

*एक्स* → 2 +

*एफ* ( *एक्स* ) = लिम *एफ* ( *एक्स* ) = 3

*एक्स* → 2

ग्राफ़ का *एफ* ( *एक्स* ) *=* 3 है फिर भी रेखा समानांतर को *एक्स* -अक्ष पासिंग के माध्यम से (0, 3) और है दिखाया में अंजीर 2.9, अध्याय 2. से यह भी यह है स्पष्ट वह आवश्यक आप LIMIT है 3. में

तथ्य, यह है आसानी से देखा वह लिम

*x*→*a*

*एफ* ( *एक्स* )

3 के लिए कोई वास्तविक संख्या *ए* ।

चित्रण 5 विचार करना समारोह *एफ* ( *एक्स* ) *= एक्स* 2 *+ एक्स* । हम चाहना को खोजो समतल मान का *एफ* ( *एक्स* ) पास में *एक्स =* 1 में मेज़ 12.7.

मेज़ 12.7

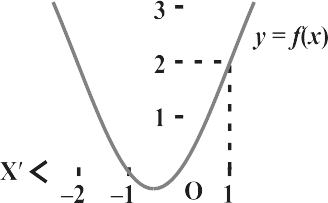
लिम *एफ* ( *एक्स* )

*एक्स* → 1

. We

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.01 | 1.1 | 1.2 |
| *एफ* ( *एक्स* ) | 1.71 | 1.9701 | 1.997001 | 2.0301 | 2.31 | 2.64 |

से यह यह है उचित को परिणाम निकालना वह



लिम

*एक्स* → 1 −

*एफ* ( *एक्स* )

लिम

*एक्स* → 1 +

*एफ* ( *एक्स* ) = लिम *एफ* ( *एक्स* ) = 2

*एक्स* → 1

.

*एफ* ( *एक्स* ) के ग्राफ से *= एक्स* 2 + *एक्स* चित्र 12.5 में दिखाया गया है, यह स्पष्ट है कि *x के रूप में* दृष्टिकोण 1, ग्राफ दृष्टिकोण (1, 2).

यहाँ, दोबारा हम निरीक्षण वह

लिम

*एफ* ( *एक्स* ) = *एफ* (1)

*एक्स* 1

अब, राजी करना अपने आप को का अगले तीन तथ्य:

अंजीर 12.5

लिम *x* 2  1, लिम *एक्स* = 1 और लिम *एक्स* + 1 = 2

*एक्स* → 1

*एक्स* → 1

*एक्स* → 1

तब

लिम

2 + मैं मैं हूँ *एक्स* = 1 +1 \_ = 2 = मैं मैं हूँ   *एक्स* 2 + *एक्स*   .

*एक्स* → 1

*एक्स* → 1

*एक्स* → 1

भी

मैं मैं हूँ . मैं हूँ ( \_ *एक्स* + 1 ) = 1 . 2 = 2 = मैं मैं हूँ   *एक्स* ( *एक्स* + 1 )   = मैं मैं हूँ   *एक्स* 2 + *एक्स*   .

*एक्स* → 1

*एक्स* → 1

*एक्स* → 1

*एक्स* → 1

सीमा और डेरिवेटिव 225

चित्रण 6 विचार करना समारोह *एफ* ( *एक्स* ) = पाप *एक्स।* हम हैं इच्छुक में कहाँ कोण है मापा में रेडियंस.

लिम पाप ,

*एक्स* → π

2

π

यहाँ, हम समतल (अनुमानित) कीमत का *एफ* ( *एक्स* ) पास में 2 (मेज़ 12.8) *.* से

यह, हम मई परिणाम निकालना वह

लिम

π -

*एक्स* →

2

*एफ* ( *एक्स* )

लिम

π +

*एक्स* →

2

*एफ* ( *एक्स* ) = आप LIMIT *एफ* ( *एक्स* ) = 1

*एक्स* → π \_

2

आगे, यह है का समर्थन किया द्वारा ग्राफ का *एफ* ( *एक्स* ) *=* पाप *एक्स* कौन है दिया गया में अंजीर 3.8

(अध्याय 3). में यह मामला बहुत, हम निरीक्षण वह

लिम

*एक्स* →

2

पाप *एक्स* = 1.

मेज़ 12.8

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | – 0.1  2 | π − 0.01  2 | अनुकरणीय + 0.01  2 | + 0.1  2 |
| *एफ* ( *एक्स* ) | 0.9950 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9950 |

चित्रण 7 विचार करना समारोह *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* + ओल *एक्स* । हम चाहना को खोजो लिम *एफ* ( *एक्स* )।

*एक्स* → 0

यहाँ हम समतल (अनुमानित) कीमत का *एफ* ( *एक्स* ) पास में 0 (मेज़ 12.9).

मेज़ 12.9

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | – 0.1 | – 0.01 | – 0.001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
| *एफ* ( *एक्स* ) | 0.9850 | 0.98995 | 0.9989995 | 1.0009995 | 1.00995 | 1.0950 |

से तालिका 13.9, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं वह

लिम *एफ* ( *एक्स* ) = लिम *एफ* ( *एक्स* ) = लिम *एफ* ( *एक्स* ) = 1

*एक्स* → 0 −

*एक्स* → 0 +

*एक्स* → 0

में यह मामला बहुत, हम निरीक्षण वह लिम *एफ* ( *एक्स* ) = *एफ* (0) = 1.

*एक्स* 0

अब, कर सकना आप राजी करना अपने आप को वह

लिम [ + ओल *एक्स* ] = लिम *एक्स* + लिम ओल *एक्स* है सचमुच सच है?

*एक्स* → 0

*एक्स* → 0

*एक्स* → 0

226 गणित

चित्रण 8 विचार करना समारोह

*एफ* ( *एक्स* ) = 1

के लिए *एक्स* > 0 . हम चाहना को जानना लिम *एफ* ( *एक्स* )।

→

*एक्स* 0

यहां, देखें कि फ़ंक्शन का डोमेन सभी सकारात्मक वास्तविक दिया गया है नंबर. इस तरह, कब हम समतल मान का *एफ* ( *एक्स* ) *,* यह करता है नहीं बनाना समझ को बात करना का *एक्स* आ 0 से बाएं। नीचे हम समतल मान का समारोह के लिए सकारात्मक *x* बंद करें को 0 (में यह मेज़ *एन* अर्थ है कोई सकारात्मक पूर्णांक).

2

नीचे दी गई तालिका 12.10 से, हम देखते हैं कि जैसे ही *x* 0 की ओर बढ़ता है, *f* ( *x* ) बन जाता है बड़ा और बड़ा. क्या हम अर्थ यहाँ है वह कीमत का *एफ* ( *एक्स* ) मई होना बनाया बड़ा बजाय कोई दिया गया संख्या।

मेज़ 12.10

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | 1 | 0.1 | 0.01 | 10 - *एन* |
| *एफ* ( *एक्स* ) | 1 | 100 | 10000 | 10 2 *एन* |

गणितीय रूप से, हम कहना

लिम *एफ* ( *एक्स* ) = + ∞

*एक्स* → 0

हम भी टिप्पणी वह हम इच्छा नहीं आना आर-पार ऐसा सीमा में यह अवधि।

चित्रण 9 हम चाहना को खोजो लिम *एफ* ( *एक्स* ) , कहाँ

*x*→0

*एफ* ( *एक्स* )

 *एक्स* − 2,

 0 ,



*एक्स* < 0

*एक्स* = 0

 2,

*x*



*एक्स* > 0

जैसा साधारण हम बनाना ए मेज़ का *एक्स* पास में 0 साथ *एफ* ( *एक्स* ) *.* निरीक्षण वह के लिए नकारात्मक मान का *एक्स*

हम ज़रूरत को मूल्यांकन करना *एक्स* – 2 और के लिए सकारात्मक मूल्य, हम ज़रूरत को मूल्यांकन करना *एक्स* + 2.

मेज़ 12.11

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | – 0.1 | – 0.01 | – 0.001 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
| *एफ* ( *एक्स* ) | – 2.1 | – 2.01 | – 2.001 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |

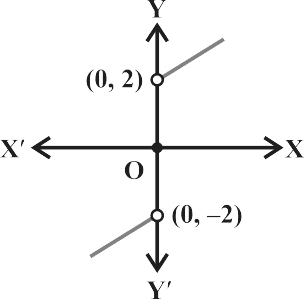
से पहला तीन प्रविष्टियां का मेज़ 12.11, हम परिणाम निकालना वह कीमत का समारोह है घटते को -2 और इस तरह।

लिम

*एक्स* → 0 −

*एफ* ( *एक्स* ) - 2

सीमा और डेरिवेटिव 227

से अंतिम तीन संपूर्ण का मेज़ हम परिणाम निकालना वह कीमत का समारोह है की बढ़ती से 2 और इस तरह

लिम

*एक्स* → 0 +

*एफ* ( *एक्स* ) 2

तब से बाएं और सही हाथ सीमा पर 0 करना नहीं संयोग, हम कहना वह आप LIMIT का समारोह पर 0 करता है नहीं अस्तित्व।

ग्राफ़ का यह समारोह है दिया गया में चित्र 12.6. यहाँ, हम टिप्पणी करते हैं कि *x* = 0 पर फ़ंक्शन का मान ठीक है परिभाषित और है, वास्तव में, बराबर को 0, लेकिन आप LIMIT का समारोह पर *एक्स* = 0 है नहीं यहां तक की परिभाषित।

चित्रण 10 जैसा ए अंतिम चित्रण, हम खोजो लिम *एफ* ( *एक्स* ) ,

*x*→1

अंजीर 12.6

कहाँ

*एफ* ( *एक्स* ) =  +2



 0

*एक्स* ≠ 1

= 1

मेज़ 12.12

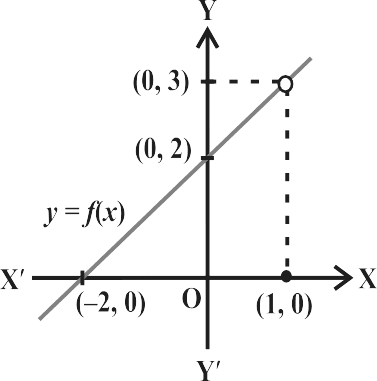
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स* | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
| *एफ* ( *एक्स* ) | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3.001 | 3.01 | 3.1 |

हमेशा की तरह हम समतल मान का *एफ* ( *एक्स* ) के लिए *एक्स* पास में 1. से मान का *एफ* ( *एक्स* ) के लिए

*एक्स* से कम 1, यह प्रतीत वह कार्यक्रम लेना चाहिए मान 3 पर *एक्स* = 1., अर्थात,

लिम *एफ* ( *एक्स* ) 3

.

*एक्स* → 1 −

इसी प्रकार, कीमत का *एफ* ( *एक्स* ) चाहिए होना 3 जैसा डिक- टेटेड द्वारा मान का *एफ* ( *एक्स* ) पर *एक्स* ग्रेटर बजाय 1. अर्थात

लिम *एफ* ( *एक्स* ) 3

.

*एक्स* → 1 +

लेकिन तब बाएं और सही हाथ सीमा Coin- साइड और इस तरह

लिम *एफ* ( *एक्स* ) लिम *एफ* ( *एक्स* ) = लिम *एफ* ( *एक्स* ) = 3 .

*एक्स* → 1 −

*एक्स* → 1 +

*एक्स* → 1

ग्राफ़ का समारोह दिया गया में अंजीर 12.7 ताकत- सुनिश्चित करें हमारा कटौती के बारे में सीमा. यहाँ, हम

अंजीर 12.7

228 गणित

ध्यान दें कि सामान्य तौर पर, किसी दिए गए बिंदु पर फ़ंक्शन का मान और उसकी सीमा हो सकती है अलग (यहां तक की कब दोनों हैं परिभाषित)।

* + 1. *बीजगणित का सीमा* में ऊपर चित्रण, हम पास होना देखा वह सीमित प्रक्रिया का सम्मान करता है जोड़ना, घटाव, गुणा और विभाजन जैसा लंबा जैसा सीमा और कार्य अंतर्गत सोच-विचार हैं कुंआ परिभाषित। यह है नहीं ए संयोग। में तथ्य, नीचे हम सजाना इन जैसा ए प्रमेय बिना सबूत।

प्रमेय 1 होने देना *एफ* और *जी* होना दो कार्य ऐसे हैं कि दोनों लिम

*एक्स* → *ए*

*एफ* ( *एक्स* ) और लिम *जी* ( *एक्स* ) अस्तित्व।

*एक्स ए*

तब

1. आप LIMIT का जोड़ का दो कार्य है जोड़ का सीमा का कार्य, अर्थात,

लिम [ *एफ* ( *एक्स* ) + *जी* ( *एक्स* )] = लिम *एफ* ( *एक्स* ) + लिम

*जी* ( *एक्स* ) *.*

*एक्स एक*  *एक्स एक*  *एक्स ए*

1. आप LIMIT का अंतर का दो कार्य है अंतर का सीमा का कार्य, अर्थात,

लिम [ *एफ* ( *एक्स* ) – *जी* ( *एक्स* )] = लिम

*एफ* ( *एक्स* ) – लिम

जी( *एक्स* ) *.*

*एक्स* → *ए*

*एक्स* → *ए*

*एक्स* → *ए*

1. आप LIMIT का उत्पाद का दो कार्य है उत्पाद का सीमा का कार्य, अर्थात,

लिम

*एक्स* → *ए*

[ *एफ* ( *एक्स* ) . *जी* ( *एक्स* )] = लिम

*एक्स* → *ए*

*एफ* ( *एक्स* ). लिम

*एक्स* → *ए*

जी( *एक्स* ) *.*

1. आप LIMIT का भागफल का दो कार्य है भागफल का सीमा का कार्य (जब कभी भी भाजक है गैर शून्य), अर्थात,

लिम

*एफ* ( *एक्स* )

लिम *एफ* ( *एक्स* )

= *एक्स* → *ए*

*एक्स* → *ए जी* ( *एक्स* )

लिम *जी* ( *एक्स* )

*एक्स* → *ए*

�Note In particular as a special case of (iii), when *g* is the constant function such that *g*(*x*) = *,* for some real number , we have

मैं हूं  ( एल . *एफ* ) ( *एक्स* )  = एल . मैं हूं *एफ* ( *एक्स* )

  .

*एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए*

में अगला दो उपखंड, हम उदाहरण देकर स्पष्ट करना कैसे को शोषण करना यह प्रमेय को मूल्यांकन करना सीमा का विशेष प्रकार का कार्य.

* + 1. *सीमाएं का बहुआयामी पद और तर्कसंगत कार्य* ए समारोह *एफ* है कहा को होना ए

बहुपद समारोह का डिग्री *एन एफ* ( *एक्स* ) = *एक 0* + *एक* 1 *एक्स* + *ए* 2 *एक्स* 2 +. . . + *ए एन एक्स एन* , कहाँ *ए* मैं *एस* हैं असली नंबर ऐसा वह *एक \_* ≠ 0 के लिए कुछ प्राकृतिक संख्या *एन।*

हम जानना वह लिम *एक्स* = *ए* । इस तरह

*एक्स ए*

सीमा और डेरिवेटिव 229

लिम 2  लिम ( *एक्स* । *एक्स* ) = लिम *एक्स* .लिम *एक्स* = *ए* । *ए* = *एक* 2

*एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए*

एक आसान व्यायाम में प्रेरण पर *एन* कहता है हम वह

लिम

*एक्स* → *ए*

= *एक \_*

अब, होने देना

*एफ* ( *एक्स* ) = *एक* 0 + *एक* 1 *एक्स* + *एक* 2 *एक्स* 2 + ... + *एक \_ एक्स एन*

होना ए बहुपद समारोह। सोच

का प्रत्येक का

0 , *एक* 1 *एक्स* , *एक* 2 *एक्स* 2 ,..., *एक \_ एक्स एन*

जैसा ए समारोह, हम पास होना

लिम

*एक्स* → *ए*

*एफ* ( *एक्स* )

लिम 

*एक्स* → *ए*

= 

= लिम

0 + *एक* 1 *एक्स* + *ए* 2 *एक्स* 2 + ... + *एक \_ एक्स एन*  

0 + लिम *एक* 1 *एक्स* + लिम *a2* \_ *एक्स* 2 + ... + लिम *ए एन एक्स एन*

*एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए*

= *एक* 0 + *एक* 1 लिम *एक्स* + *एक* 2 लिम *एक्स* 2 + ... + *एक \_* लिम *एक्स एन एक्स एक*  *एक्स एक*  *एक्स ए*

→ → →

= *एक* 0 + *एक* 1 *ए* + *एक* 2 *एक* 2 + ... + *ए एन ए एन*

= *एफ* ( *ए* )

(बनाना सुनिश्चित करें कि आप औचित्य को समझते हैं उपरोक्त प्रत्येक चरण के लिए!)

*जी* ( *एक्स* )

ए समारोह *एफ* है कहा को होना ए तर्कसंगत समारोह, अगर *एफ* ( *एक्स* ) = *एच* ( *एक्स* ) , कहाँ *जी* ( *एक्स* ) और *एच* ( *एक्स* ) हैं बहुआयामी पद ऐसा वह *एच* ( *एक्स* ) ≠ 0. तब

लिम *एफ* ( *एक्स* ) = लिम

*जी* ( *एक्स* )

लिम *जी* ( *एक्स* )

= *एक्स* → *ए*  =

*जी* ( *ए* )

*एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए एच* ( *एक्स* )

लिम *एच* ( *एक्स* )

*एक्स* → *ए*

*ज* ( *ए* )

हालाँकि, यदि *h* ( *a* ) = 0, तो दो परिदृश्य हैं - (i) जब *g* ( *a* ) ≠ 0 और (ii) जब *g* ( *a* ) = 0. पहले मामले में हम कहते हैं कि सीमा मौजूद नहीं है। बाद वाले मामले में हम कर सकना लिखना *जी* ( *एक्स* ) = ( *एक्स* – *ए* ) *के जी* ( *एक्स* ), कहाँ *क* है अधिकतम का पॉवर्स का ( *एक्स* – *ए* ) में *जी* ( *एक्स* )

1

इसी प्रकार, *एच* ( *एक्स* ) = ( *एक्स* – *ए* ) *एल एच*

1

1. जैसा *एच* ( *ए* ) = 0. अब, अगर *क* > *मैं,* हम पास होना

मैं मैं हूँ *जी* ( *एक्स* ) एल आई एम ( *एक्स* − *ए* ) *क* *जी* ( *एक्स* )

लिम *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* → *ए*  = *एक्स* → *ए*  1

*एक्स* → *ए*

लिम *एच* ( *एक्स* )

लिम (

* *ए* ) *एल* *एच* ( *एक्स* )

*एक्स* → *ए*  *एक्स* → *ए*  1

230 गणित

मैं मैं हूँ ( *एक्स* − *ए* ) ( *क* − *एल* ) *जी* ( *एक्स* )

= *एक्स* → *ए*

1

लिम *ज* 1 ( *एक्स* )

*एक्स* → *ए*

= 0. *जी* 1 ( *ए* ) = 0

*ज* 1 ( *ए* )

अगर *क* < *मैं,*  आप LIMIT है नहीं परिभाषित।

उदाहरण 1 खोजें सीमाएँ: (मैं)

मैं मैं हूँ  *x* 3

*एक्स* → 1



*एक्स* 2 + 1 ( ii )

मैं हूं  *एक्स* ( *एक्स* +1 )  \_

*एक्स* → 3

 

(iii)

मैं मैं हूँ  1 + + *एक्स* 2 + . . . + *x* 1 0 

*एक्स* →− 1

 .

समाधान आवश्यक सीमा हैं सभी सीमा का कुछ बहुपद कार्य. इस तरह सीमा हैं मान की समारोह पर निर्धारित अंक. हम पास होना

(i) लिम [ *x3* \_ – *एक्स* 2 + 1] = 1 3 – 1 2 + 1 = 1

*एक्स* 1

(ii)

मैं हूं  *एक्स* ( *एक्स* +1 )  \_ = 3 ( 3 +1 ) \_ = 3 ( 4 ) = 1 2

*एक्स* → 3

 

(iii)

मैं मैं हूँ  1 + + *एक्स* 2 + . . . + *x* 1 0 

*एक्स* →− 1

 

= 1 + ( - 1 ) + ( − 1 ) 2 + ... + ( − 1 ) 10

= 1 − 1 + 1... + 1 = 1 .

उदाहरण 2 खोजें सीमाएँ:

 *एक्स* 2 + 1   3 − 4 *x* 2 + 4 *एक्स* 

(मैं)

लिम 

(ii)

लिम 2 

*एक्स* → 1  *एक्स* +100 

*एक्स* → 2 

*एक्स* − 4 \_

(iii)



लिम

*एक्स* 2 − 4 \_

3 2 

(iv)



लिम

*एक्स* 3 − 2 *x* 2 

2  \_

*एक्स* → 2 

– 4 *एक्स* + 4 *एक्स* 

*एक्स* → 2  *एक्स*

5 *एक्स* + 6 

(वी)

लिम  *एक्स* − 2 - 1  .

*एक्स* → 1 

2 − *एक्स*  *एक्स* 3 − 3 *x* 2 + 2 *एक्स*  

समाधान सभी कार्य अंतर्गत सोच-विचार हैं तर्कसंगत कार्य. इस तरह, हम पहला

0

मूल्यांकन करना इन कार्य पर निर्धारित अंक. अगर यह है का रूप 0 , हम कोशिश को

पुनर्लेखन समारोह रद्द कर रहा है कारकों कौन हैं के कारण आप LIMIT को होना का

0

रूप 0 .

सीमा और डेरिवेटिव 231

*एक्स* 2 +1 1 2 + 1 2

* 1. हम पास होना

लिम

*एक्स* → 1

== \_

+ 100 1 +100 101

0

* 1. का मूल्यांकन समारोह पर 2, यह है का रूप 0 .

इस तरह

लिम

3 − 4 *x* 2 + 4 *एक्स*

2  =

लिम

*एक्स* ( *एक्स* − 2 ) 2

*एक्स* → 2

*एक्स* − 4

*एक्स* → 2 ( *एक्स* + 2 )( *एक्स* − 2 )

*एक्स* ( *एक्स* − 2 )

= लिम के रूप में *एक्स*  2

≠

*एक्स* → 2 ( *एक्स* +2 )

2 ( 2 − 2 )

=

0 = 0 .

2 + 2 4

0

* 1. का मूल्यांकन समारोह पर 2, हम पाना यह का रूप 0 .

*एक्स* 2 − 4

( *एक्स* + 2 )( *एक्स* − 2 )

लिम

इस तरह

लिम

*एक्स* → 2

3 − 4 *x* 2 + 4 *एक्स* =

*एक्स* → 2 *एक्स* ( *एक्स* − 2 ) 2

( *एक्स* + 2 ) 2 + 2 4

कौन है नहीं परिभाषित।

लिम

*एक्स* → 2 *एक्स एक्स* − 2

= =

=

2 ( 2 − 2 ) 0

0

* 1. का मूल्यांकन समारोह पर 2, हम पाना यह का रूप 0 .

( )

इस तरह

लिम

3 − 2 *x* 2

2

= लिम

*एक्स* 2 ( *एक्स* − 2 )

*एक्स* → 2 *एक्स*

5 *एक्स* + 6

=

*एक्स* → 2 ( *एक्स*

*एक्स* 2

लिम

2 )( *एक्स* − 3 )

( 2 ) 2

= 4 = − 4 .

*एक्स* → 2 ( *एक्स* − 3 )

2 − 3 − 1

232 गणित

* 1. पहला, हम पुनर्लेखन समारोह जैसा ए तर्कसंगत समारोह।

−



 *एक्स* − 2 1

  *एक्स* − 2 1 

 2 − *एक्स* − *एक्स* 3 − 3 *x* 2 + 2 *एक्स*  



=  *एक्स* ( *एक्स* - 1 )

*एक्स* ( *x2*  \_

 *एक्स* − 2 - 1 

– 3*x* + 2)

=  *एक्स* ( *एक्स* - 1 ) *एक्स* ( *एक्स* - 1 )( *एक्स* − 2 ) 



 *एक्स* 2  4 *एक्स* + 4 − 1 

= *एक्स* ( *एक्स* - 1 )( *एक्स* − 2 ) 

  

*एक्स* 2 − 4 *एक्स* + 3

= *एक्स* ( *एक्स* 1 )( *एक्स* − 2 )

0

का मूल्यांकन समारोह पर 1, हम पाना यह का रूप 0 .

 *एक्स* 2 − 2 1  *x* 2 − 4 *एक्स* + 3

इस तरह

लिम 2

– 3 2

 = लिम

*एक्स* → 1 

– *एक्स*  *एक्स*

* 3 *एक्स*

+ 2 *एक्स* 

*एक्स* → 1 *एक्स* ( *एक्स*

1 )( *एक्स* − 2 )

= लिम

( *एक्स* − 3 )( *एक्स* - 1 )

*एक्स* → 1 *एक्स* ( *एक्स*

1 )( *एक्स* − 2 )

= लिम *एक्स*  3

1 3

=

= 2.

*एक्स* → 1 *एक्स* ( *x*  2 ) 1 ( 1 − 2 )

हम टिप्पणी वह हम सकना रद्द करना अवधि ( *एक्स* – 1) में ऊपर मूल्यांकन क्योंकि

1 .

मूल्यांकन का एक महत्वपूर्ण आप LIMIT कौन इच्छा होना इस्तेमाल किया गया में अगली कड़ी है दिया गया जैसा ए प्रमेय नीचे।

प्रमेय 2 के लिए कोई सकारात्मक पूर्णांक *एन,*

*एक्स एन* − *ए एन*  *एन* 1

लिम

*एक्स* → *ए*

– *ए* = *ना*  *.*

*टिप्पणी*  अभिव्यक्ति में ऊपर प्रमेय के लिए आप LIMIT है सत्य यहां तक की अगर *एन* है कोई तर्कसंगत संख्या और *ए* है सकारात्मक।

सीमा और डेरिवेटिव 233

सबूत डिवाइडिंग ( *एक्स एन* – *एक ) \_* द्वारा ( *एक्स* – *ए),* हम देखना वह

*एक्स एन* – *एक \_* = ( *एक्स* - *ए* ) ( *एक्सएन* -1 *\_* + *एक्सएन* -2 *\_* *ए* + *एक्स एन* -3 *एक* 2 + ... + *एक्स एएन* -2 *\_* + *ए एन* -1 )

*एक्स एन* − *एक \_*

इस प्रकार, लिम

*एक्स ए*

= लिम ( *एक्सएन* -1 *\_* + *एक्सएन* -2 *\_* *ए* + *एक्स एन* -3 *एक* 2 + ... + *एक्स एएन* -2 *\_* + *ए एन* -1 )

* *और*  *एक्स* → *ए*

= *में \_* – एल + *ए और एन* -2 +. . . + *और एन* -2 ( *ए* ) *+ ए एन* -एल

= *ए एन* -1 + *एक \_* – 1 +...+ *ए एन* -1 + *ए एन* -1 ( *एन* शर्तें)

= *ना एन* 1

उदाहरण 3 मूल्यांकन करना:

*x* 15 1

(मैं)

1 + *x* −1

लिम 10

(ii) लिम

*एक्स* → 1 *एक्स*

समाधान (मैं) हम पास होना

1

लिम

*x* 15 − 1

10 =

लिम

*एक्स* → 0

 *x* 15 − 1

*x* 10 - 1 



÷

*एक्स* → 1 *एक्स* − 1

*एक्स* → 1 

*एक्स* − 1

*एक्स* − 1 

 *x* 15 − 1 \_ \_ *x* 10 - 1 

*x*

1 

*x*→1 

*x* −1 

= लिम

*x*→1



–  ÷ लिम  

= 15(1) 14 ÷ 10(1) 9 (द्वारा प्रमेय ऊपर)

= 15 ÷ 10 = 3

2

(ii) रखना *य* = 1 + *एक्स,* इसलिए वह *य* → 1 जैसा *एक्स*  0.

1 + *x*

तब

लिम

*एक्स* → 0

− 1 =

लिम *वाई*  1

*आप* → 1 *य* 1



11 \_

= लिम

*आप* → 1

1

*य* 2 1 2

*य* 1

1 − 1 1

= (1) 2

2

(द्वारा टिप्पणी ऊपर) = 2

234 गणित

* 1. सीमाएं का त्रिकोणमितीय कार्य

अगले तथ्य (कहा गया जैसा प्रमेय) के बारे में कार्य में सामान्य आना में सुविधाजनक में की गणना सीमा का कुछ त्रिकोणमितीय कार्य.

प्रमेय 3 चलो *एफ* और *जी* दो हो असली मूल्यवान कार्य साथ एक ही डोमेन ऐसा है कि

*एफ* ( *एक्स* ) ≤ जी( *एक्स* ) के लिए सभी *एक्स* में कार्यक्षेत्र का परिभाषा, के लिए कुछ *ए,* अगर दोनों लिम

*x a*

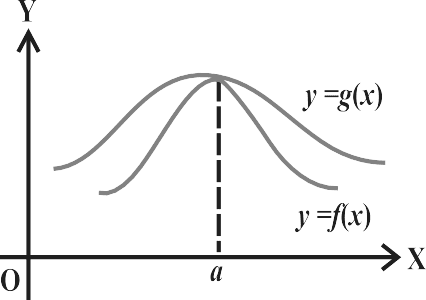
*एफ* ( *एक्स* ) और

लिम *जी* ( *एक्स* ) अस्तित्व, तब लिम *एफ* ( *एक्स* ) ≤ लिम *जी* ( *एक्स* ). यह है इलस्ट्रेटेड में अंजीर 12.8.

*एक्स* → *ए*

*एक्स* → *ए*

*एक्स* → *ए*



अंजीर 12.8

प्रमेय 4 (सैंडविच प्रमेय) होने देना *एफ,* जी और *एच* होना असली कार्य ऐसा वह

*एफ* ( *एक्स* ) ≤ *जी* ( *एक्स* ) ≤ *एच* ( *एक्स* ) के लिए सभी *एक्स* में सामान्य कार्यक्षेत्र का परिभाषा। के लिए कुछ असली संख्या

→*a*

*ए* , अगर लिम

→*a*

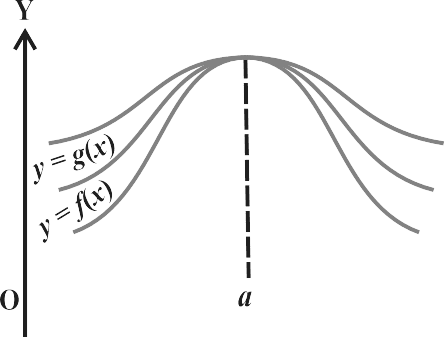
*एफ* ( *एक्स* ) = *एल* = लिम

*एच* ( *एक्स* ), तब लिम

→ *ए*

*जी* ( *एक्स* ) = *एल* यह सचित्र है में चित्र 12.9.

अंजीर 12.9



दिया गया नीचे है ए सुंदर ज्यामितिक सबूत का अगले महत्वपूर्ण असमानता संबंधित त्रिकोणमितीय कार्य.

ओल *एक्स* < पाप *एक्स* < 1

के लिए 0

*एक्स* < π

2

(\*)

सीमा और डेरिवेटिव 235

सबूत हम जानना वह पाप (- *एक्स* ) = – पाप *एक्स* और क्योंकि( *– एक्स* ) = ओल *एक्स।* इस तरह, यह है पर्याप्त

को सिद्ध करना असमानता के लिए 0

*एक्स* < .

2



में अंजीर 12.10, हे है केंद्र का इकाई घेरा ऐसा वह

कोण एओसी है *एक्स* रेडियंस और 0 < *एक्स* < 2 . रेखा खंडों बी ए और सीडी के लंबवत हैं ओए *.* आगे, जोड़ना एसी। तब

क्षेत्र का

∆ ओएसी < क्षेत्र का क्षेत्र ओएसी < क्षेत्र का ∆ ओएबी.

अंजीर 12.10

1 *एक्स*  1

यानी, OA.CD < . .(ओए) 2 < OA.AB .

2 2 2

यानी, सीडी < *एक्स* . ओए < एबी.

से ∆ ओसीडी,

सीडी एबी

पाप *एक्स* = ओए (तब से ओसी = ओए) और इस तरह सीडी = ओए पाप *एक्स।* भी टैन *एक्स* = ओए और

इसलिए एबी = ओए *.* टैन *एक्स* । इस प्रकार

ओए पाप *एक्स* < ओए *. एक्स* < ओए *.* टैन *एक्स* ।

तब से लंबाई ओए है सकारात्मक, हम पास होना पाप *एक्स* < *एक्स* < टैन *एक्स* ।

π

तब से 0 < *एक्स* < 2 , पाप *एक्स* है सकारात्मक और इस प्रकार द्वारा डिवाइडिंग लगातार द्वारा पाप *एक्स,* हम पास होना

1< *x*  < 1 . ले रहा पारस्परिक लगातार, हम पास होना

पाप क्योंकि *एक्स*

ओल *एक्स* < पाप *एक्स* < 1

कौन पूरा सबूत।

प्रमेय 5 अगले हैं दो महत्वपूर्ण सीमाएं.

* 1. लिम पाप *एक्स*

*एक्स* → 0

1 . (ii) लिम 1 ओल *एक्स*  0 .

*एक्स* → 0

सबूत (मैं) असमानता में (\*) कहते हैं वह समारोह में है sandwiched बीच में समारोह ओल *एक्स* और यह निरंतर कार्य जो मूल्य लेता है 1.

236 गणित

आगे, तब से

लिम

ओल *एक्स* = 1, हम देखना वह सबूत का (मैं) का प्रमेय है

*एक्स* 0

पूरा द्वारा सैंडविच प्रमेय.

 

तब

को सिद्ध करना (ii), हम याद करना त्रिकोणमितीय पहचान 1 – ओल *एक्स* = 2 पाप 2   .

 

2

2पाप 2  *एक्स*  पाप  *एक्स* 

1 ओल *एक्स*

 2   2   

लिम

= लिम   = लिम   .पाप 

*एक्स* → 0

*एक्स* → 0

*एक्स*

पाप  *एक्स* 

 

*एक्स* → 0 *एक्स*

2

 2 

= लिम

 2   *एक्स* 

.लिम्सिन  

1.0 = 0

*एक्स* → 0 *एक्स*

2

*एक्स* → 0

 2 

निरीक्षण वह हम पास होना उलझाव से इस्तेमाल किया गया तथ्य वह *एक्स* → 0 है समकक्ष को

मई होना न्याय हित द्वारा डाल *य* = 2 .

*एक्स* → 0 . यह

2

उदाहरण 4 मूल्यांकन करें: (i) लिम पाप 4

*एक्स* → 0 इसका 2

* 1. गोंद टैन

*एक्स* → 0

समाधान (में)

गोंद इसका 4

= गोंद  इसका 4x *\_* . 2x *\_*

. 2 \_

*एक्स* → 0 इसका 2

*एक्स* → 0 

4 पाप 2 *एक्स*   

= 2 . मैं हूं  उसका 4

 ÷  इसका 2x *\_* 

*एक्स* → 0  4

    2x *\_*  

= 2 . मैं हूं  में है 4 *एक्स*  ÷ मैं हूं  में है 2 *एक्स* 

4 *एक्स* → 0  42 \_ \_ \_ *एक्स* → 0   2x *\_*  

= 2.1.1 = 2 (जैसा *एक्स* → 0, 4 *एक्स* → 0 और 2 *एक्स* → 0)

सीमा और डेरिवेटिव 237

(ii) हम पास होना

लिम टैन

= लिम

पाप

= लिम पाप *एक्स* . लिम 1

= 1.1 = 1

*एक्स* → 0

*एक्स* → 0

ओल *एक्स*

*एक्स* → 0

*एक्स* → 0 ओल *एक्स*

ए सामान्य नियम वह आवश्यकताओं को होना रखा में दिमाग जबकि का मूल्यांकन सीमा है अगले।

*एफ* ( *एक्स* )

कहना, दिया गया वह आप LIMIT

लिम

*एक्स* → *ए*

*जी* ( *एक्स* )

मौजूद और हम चाहना को मूल्यांकन करना यह। पहला हम जाँच करना

कीमत का *एफ* ( *ए* ) और *जी* ( *ए* ). अगर दोनों हैं 0, तब हम देखना अगर हम कर सकना पाना कारक कौन है के कारण शर्तें को गायब होना, अर्थात, देखना अगर हम कर सकना लिखना *एफ* ( *एक्स* ) = *च* 1 ( *एक्स* ) *एफ* 2 ( *एक्स* ) इसलिए वह *एफ* 1 ( *ए* ) = 0 और *एफ* 2 ( *ए* ) ≠ 0. इसी तरह, हम *जी* ( *एक्स* ) = *जी* 1 ( *एक्स* ) *जी* 2 ( *एक्स* ) लिखते हैं, जहां *जी* 1 ( *ए* ) = 0 और *जी* 2 ( *ए* ) ≠ 0. रद्द करना बाहर सामान्य कारकों से *एफ* ( *एक्स* ) और *जी* ( *एक्स* ) (अगर संभव) और लिखना

*एफ* ( *एक्स* )

*q* ( *x*)

*जी* ( *एक्स* )

= *पी* ( *एक्स* ) , कहाँ *क्यू* ( *एक्स* ) ≠ 0.

तब

लिम

*एफ* ( *एक्स* )

= *पी* ( *ए* ) .

*एक्स* → *ए जी* ( *एक्स* ) *क्यू* ( *ए* )

मूल्यांकन करना अगले सीमा में अभ्यास 1 को 22.

EXERCISE 12.1

* + 1. लिम + 3

 22 

* + 1. लिम *एक्स*

−

* + 1. लिम 2

*एक्स* → 3

*एक्स* → π 7 \_ 

*आर* → 1

 

* + 1. लिम 4 *x*  3

*एक्स* → 4 2

* + 1. लिम

*एक्स* → − 1

*x* 10

*एक्स* 5 +1

− 1

* + 1. लिम

*एक्स* → 0

( *एक्स* +1 ) 5 \_ − 1

* + 1. लिम

3 *x* 2

2

*एक्स* −10 \_

* + 1. लिम

*एक्स* 4 − 81

2

* + 1. लिम

*कुल्हाड़ी* + *बी*

*एक्स* → 2

*एक्स* − 4

*एक्स* → 3 2 *एक्स*

– 5 *एक्स* − 3

*एक्स* → 0 *एक्स* 1

1

लिम *जेड* 3 1

*कुल्हाड़ी* 2 + *बीएक्स* + *सी*

*जेड* → 1

1

6 − 1

* + 1. लिम

*एक्स* → 1 *सीएक्स* 2

+ *बीएक्स* + *ए*

, *ए* + *बी* + *सी* ≠ 0

लिम

*एक्स* → − 2

11 \_

*एक्स*  2

+ 2

* + 1. लिम

*एक्स* → 0

*कुल्हाड़ी* में *बीएक्स*

आप LIMIT हाँ *कुल्हाड़ी* , *ए* , *बी* ≠ 0

*एक्स* → 0 हाँ *बीएक्स*

238 गणित

हाँ ( π )

आप LIMIT

* + 1. आप LIMIT ओल
    2. आप LIMIT ओल 2 - 1

*एक्स* → पी

लिम

पी ( पी − )

*एक्स* + *एक्स* ओएस *एक्स*

*एक्स* → 0 अनुकरणीय

* + 1. लिम सेकंड *एक्स*

*एक्स* → 0

ओएस 1

*एक्स* → 0

*बी* पाप *एक्स*

*एक्स* → 0

लिम पाप *कुल्हाड़ी* + *बीएक्स ए* , *बी* , *ए* + *बी* ≠ 0 , 21. लिम (कोसेक खाट *एक्स* )

22.

*एक्स* → 0

लिम

*एक्स* → π

2

*एक्स* + पाप *बीएक्स*

टैन 2

*एक्स*

2

*एक्स* → 0

 2 *एक्स* + 3,

*x*→1



*एक्स* ≤ 0

1. खोजो लिम *एफ* ( *एक्स* )

*x*→0

और लिम *एफ* ( *एक्स* ) , कहाँ

*एफ* ( *एक्स* ) =  3 ( *एक्स*

1 ) ,

*एक्स* > 0

1. खोजो लिम *एफ* ( *एक्स* ) , कहाँ

*x*→1

*एफ* ( *एक्स* ) =  



−

2 - 1,

2 - 1,

 | *एक्स* | ,



*एक्स* ≤ 1

1. > 1

*एक्स* ≠ 0

1. मूल्यांकन करना लिम *एफ* ( *एक्स* ) , कहाँ

*एफ* ( *एक्स* ) =  *एक्स*

*एक्स* → 0

  0 ,

*एक्स* = 0

 *एक्स*  *एक्स* ≠ 0



1. खोजो

लिम *एफ* ( *एक्स* )

*एक्स* → 0

, कहाँ

*एफ* ( *एक्स* ) =  | *एक्स* |

  0 *एक्स*  0

1. खोजो लिम *एफ* ( *एक्स* ) , कहाँ

*x*→5

*एफ* ( *एक्स* )

*एक्स* | − 5

1. कल्पना करना

 *ए* *बीएक्स* ,

*एफ* ( *एक्स* ) =  4 ,



*एक्स* < 1

*एक्स* = 1

 *बी* - *एक्स*  *एक्स से* > 1



और अगर लिम *एफ* ( *एक्स* ) = *एफ* (1) क्या हैं संभव मान का *ए* और *बी* ?

*एक्स* → 1

सीमा और डेरिवेटिव 239

1. होने देना *एक* 1 , *एक* 2 , . . ., *एक \_* होना तय असली नंबर और परिभाषित करना ए समारोह

*एफ* ( *एक्स* ) = ( *एक्स* − *एक* 1 ) ( *एक्स* − *एक* 2 ) ... ( *एक्स* − *एक \_* ) .

क्या है

लिम *एफ* ( *एक्स* ) ? के लिए कुछ *ए* ≠ *ए , ए , ..., ए* , गणना लिम

*एफ* ( *एक्स* )।

1. अगर

*एफ* ( *एक्स* )

*एक्स* → *ए* 1

 *एक्स* +1,

 0,



*एक्स* < 0

*एक्स* = 0 .

1 2 *एन*  *एक्स ए*

 1,

*x*



*एक्स* > 0

के लिए क्या कीमत (एस) का *ए* करता है लिम *एफ* ( *एक्स* ) मौजूद?

*x*→*a*

*एफ* ( *एक्स* ) − 2

1. अगर समारोह *एफ(एक्स)* संतुष्ट लिम

, मूल्यांकन करना लिम *एफ* ( *एक्स* ) .

*एक्स* → 1 *एक्स* 2 − 1

*एक्स* → 1

 *एमएक्स* 2 *\_* + *एन*  *एक्स* < 0



1. अगर

*एफ* ( *एक्स* )

 *एनएक्स* + *म*  0 ≤ *एक्स* ≤ 1

. के लिए क्या पूर्णांकों *एम* और *एन* करता है दोनों

लिम *एफ* ( *एक्स* )

 *एन एक्स* 3 + *एमएक्स*  *\_* > 1



*एक्स* → 0

और लिम *एफ* ( *एक्स* ) अस्तित्व?

*x*→1

#### संजात

हमने अनुभाग 13.2 में देखा है कि विभिन्न स्थानों पर किसी पिंड की स्थिति जानकर समय अंतराल यह है संभव को खोजो दर पर कौन पद का शरीर है बदल रहा है. यह है का बहुत सामान्य दिलचस्पी को जानना ए निश्चित पैरामीटर पर विभिन्न क्षण का समय और यह किस दर से बदल रहा है यह जानने का प्रयास करें। वास्तविक जीवन की कई स्थितियाँ हैं जहां ऐसी प्रक्रिया को अंजाम देने की जरूरत है. उदाहरण के लिए, लोग एक बनाए रखते हैं जलाशय ज़रूरत को जानना कब इच्छा ए जलाशय अतिप्रवाह जानने गहराई का पानी समय के कई उदाहरणों में, रॉकेट वैज्ञानिकों को सटीक वेग की गणना करने की आवश्यकता होती है साथ कौन उपग्रह आवश्यकताओं को होना गोली मारना बाहर से राकेट जानने ऊंचाई का राकेट पर विभिन्न बार. वित्तीय संस्थान ज़रूरत को भविष्यवाणी करना परिवर्तन में कीमत का ए विशिष्ट भंडार जानने इसका उपस्थित कीमत। में इन, और अनेक ऐसा मामलों यह है वांछित को जानना कैसे ए विशिष्ट पैरामीटर है बदल रहा साथ आदर को कुछ अन्य पैरामीटर. दिल का मामला है यौगिक का ए समारोह पर ए दिया गया बिंदु में इसका कार्यक्षेत्र का परिभाषा।

240 गणित

परिभाषा 1 *कल्पना करना एफ है ए असली महत्वपूर्ण समारोह और ए है ए बिंदु में इसका कार्यक्षेत्र का परिभाषा। यौगिक का एफ पर ए है परिभाषित द्वारा*

*एफ* ( *ए* + *एच* ) − *एफ* ( *ए* )

लिम

*एच* → 0 *एच*

*प्रदान किया यह आप LIMIT मौजूद। यौगिक का एफ* ( *एक्स* ) *पर ए है लक्षित द्वारा एफ '* ( *ए* ) *.*

#### निरीक्षण वह *एफ '* ( *ए* ) परिमाणित करता है परिवर्तन में *एफ* ( *एक्स* ) पर *ए* साथ आदर को *एक्स।*

उदाहरण 5 खोजो यौगिक पर *एक्स* = 2 का समारोह *एफ* ( *एक्स* ) = 3 *एक्स.*

समाधान हम पास होना

*एफ '* (2) = लिम

*एच* → 0

*एफ* ( 2 + *एच* ) − *एफ* ( 2 )

*एच*

= लिम

*एच* → 0

3 ( 2 + *एच* ) − 3 ( 2 )

*एच*

= गोंद 6 + 3 *घंटे* − 6

गोंद 3 *घंटे* = गोंद 3 = 3 .

*एच* → 0 *एच*

*एच* → 0 *एच*  *एच* → 0

का व्युत्पन्न कार्यक्रम 3 *एक्स x* = 2 पर 3 है.

उदाहरण 6 खोजो यौगिक का समारोह *एफ* ( *एक्स* ) = 2 *x* 2 + 3 *एक्स* – 5 पर *एक्स* = -1. भी सिद्ध करना वह *एफ "* (0) + 3 *फं "* ( –1) = 0.

समाधान हम पहला खोजो डेरिवेटिव का *एफ* ( *एक्स* ) पर *एक्स* = -1 और पर *एक्स* = 0. हम पास होना

*एफ* ( 1 + *एच* ) − *एफ* ( - 1 )

*एफ* ' ( 1 )

= लिम

*एच* → 0

 2 (

*एच*

1 + *ज* ) 2 + 3 ( - 1 + *एच* ) − 5 \_ −  2 ( − 1 ) 2 + 3 ( - 1 ) − 5 \_

= लिम    

*एच* → 0 *एच*

2h2 *\_* \_ − *एच*

= लिम लिम ( 2 *घंटे)* - 1 ) = 2 ( 0 ) − 1 = − 1

*एच* → 0 *एच*

*एच* → 0

और

*एफ* ( 0 )

= लिम

*एच* → 0

*एफ* ( 0 + *एच* ) − *एफ* ( 0 )

*एच*

 2 ( 0 + *ज* ) 2 + 3 ( 0 + *एच* ) − 5 \_ −  2 ( 0 ) 2 + 3 ( 0 ) − 5 \_

= लिम    

*एच* → 0 *एच*

सीमा और डेरिवेटिव 241

2 *घंटे* 2 + 3 *घंटे*

( ) ( )

= लिम लिम 2 *घंटे* + 3 = 2 0 + 3 = 3

*एच* → 0 *एच*

*एच* → 0

स्पष्ट रूप से

*एफ* ( 0 ) + 3 *एफ* ' ( - 1 ) = 0

*टिप्पणी* पर यह अवस्था टिप्पणी वह मूल्यांकन कर रहा है यौगिक पर ए बिंदु शामिल असरदार उपयोग का विभिन्न नियम, सीमा हैं अधीन को। अगले चित्रण करता है यह।

उदाहरण 7 खोजो यौगिक का पाप *एक्स* पर *एक्स* = 0.

समाधान होने देना *एफ* ( *एक्स* ) = पाप *एक्स।* तब

*एफ* ( 0 + *एच* ) − *एफ* ( 0 )

*च* ' (0) = लिम

*एच* → 0 *एच*

पाप ( 0 + *एच* ) − पाप ( 0 )

= गोंद

= गोंद उसका *ज*  1

*एच* → 0 *एच*  *एच* → 0 *एच*

उदाहरण 8 खोजो यौगिक का *एफ* ( *एक्स* ) = 3 पर *एक्स* = 0 और पर *एक्स* = 3.

समाधान चूँकि व्युत्पन्न फ़ंक्शन में परिवर्तन को मापता है, सहज रूप से यह स्पष्ट है वह यौगिक का स्थिर समारोह अवश्य होना शून्य पर प्रत्येक बिंदु। यह है वास्तव में, का समर्थन किया द्वारा अगले गणना.

*एफ* ' ( 0 ) *=*

*एफ* ( 0 + *एच* ) − *एफ* ( 0 )

लिम लिम

3 − 3 = लिम 0

= 0 *.*

*एच* → 0

*एच*

*एफ* ( 3 + *एच* ) − *एफ* ( 3 )

*एच* → 0

*एच*

3 − 3

*एच* → 0 *एच*

उसी प्रकार

*एफ* ( 3 ) =

लिम लिम

= 0 .

*एच* → 0 *एच*  *एच* → 0 *एच*

#### हम अब उपस्थित ए ज्यामिति- रिक व्याख्या का यौगिक का ए समारोह पर ए बिंदु। होने देना *य* = *एफ* ( *एक्स* ) होना ए समारोह और होने देना पी = ( *ए* , *च* ( *ए* )) और क्यू = ( *ए* + *एच* , *एफ* ( *ए* + *एच* ) होना दो अंक बंद करना को प्रत्येक अन्य पर ग्राफ का यह समारोह। अंजीर 12.11 है अब खुद व्याख्यात्मक.

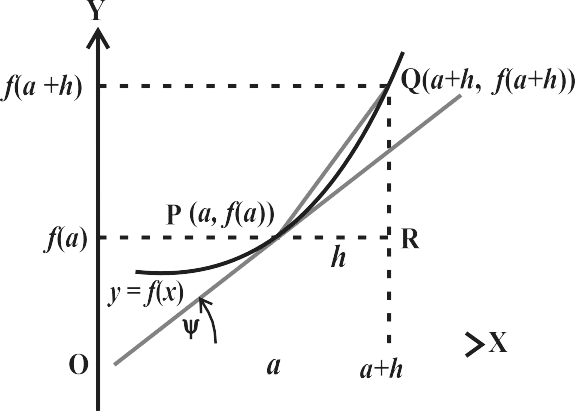


Fig 12.11

242 गणित

हम जानना वह

*एफ* ' ( *ए* ) = लिम *एफ* ( *ए* + *एच* ) − *एफ* ( *ए* )

*एच* → 0 *एच*

त्रिभुज PQR से यह स्पष्ट है कि हम जिस अनुपात की सीमा ले रहे हैं एकदम सही बराबर को टैन(क्यूपीआर) कौन है ढलान का तार पी क्यू। में सीमित प्रक्रिया, जैसा *एच* आदत को 0, बिंदु क्यू आदत को पी और हम पास होना

लिम

*एफ* ( *ए* + *एच* ) − *एफ* ( *ए* )

= लिम QR

*एच* → 0 *एच*  क्यू → पी जनसंपर्क

यह इस तथ्य के समतुल्य है कि जीवा PQ, P की स्पर्शरेखा की ओर झुकती है वक्र *य* = *एफ* ( *एक्स* ). इस प्रकार आप LIMIT मोड़ों बाहर को होना बराबर को ढलान का स्पर्शरेखा इस तरह

*एफ* ' ( *ए* ) = टैन पी .

के लिए ए दिया गया समारोह *एफ* हम कर सकना खोजो यौगिक पर प्रत्येक बिंदु। अगर यौगिक मौजूद पर प्रत्येक बिंदु, यह को परिभाषित करता है ए नया समारोह बुलाया यौगिक का *एफ .* औपचारिक रूप से, हम परिभाषित करना यौगिक का ए समारोह जैसा अनुसरण करता है।

परिभाषा 2 *कल्पना करना एफ है ए असली महत्वपूर्ण समारोह, समारोह परिभाषित द्वारा*

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* )

लिम

*एच* → 0 *एच*

*जहां कहीं भी आप LIMIT मौजूद है परिभाषित को होना यौगिक का एफ पर एक्स और है लक्षित द्वारा एफ '* ( *एक्स* ) *. यह परिभाषा का यौगिक है भी बुलाया पहला सिद्धांत का व्युत्पन्न.*

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* )

इस प्रकार

*एफ* ' ( *एक्स* ) = लिम

*एच* → 0 *एच*

स्पष्ट रूप से कार्यक्षेत्र का परिभाषा का *एफ '* ( *एक्स* ) है जहां कहीं भी ऊपर आप LIMIT मौजूद। वहाँ हैं अलग अंकन के लिए यौगिक का ए समारोह। कभी-कभी *एफ '* ( *एक्स* ) है लक्षित द्वारा

*डी*  *एफ* ( *एक्स* ) या अगर *य* = *एफ* ( *एक्स* ) *,* यह है लक्षित द्वारा *डीवाई* . यह है निर्दिष्ट को जैसा यौगिक का *एफ* ( *एक्स* )

*डीएक्स*  *डीएक्स*

( )

या *य* साथ आदर को *एक्स।* यह है भी दर्शाया गया है द्वारा डी ( *एफ* ( *एक्स* ) )। आगे, यौगिक *वसा* की \_ *एक्स = ए*

है भी लक्षित द्वारा

*डी एफ* ( *एक्स* ) या

*डीएक्स*  *ए*

 *डीएफ* 

*df*

*dx*

*ए* या और भी  *डीएक्स*  *एक्स* = *ए* .



उदाहरण 9 खोजो यौगिक का *एफ(एक्स)* = 10 *एक्स.*

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* )

समाधान तब से *एफ ' ( एक्स)* =

लिम

*एच* → 0 *एच*

= लिम

*एच* → 0

10 ( + *एच* ) −10 \_ ( *एक्स* )

*एच*

सीमा और डेरिवेटिव 243

= लिम 10 *घंटे*

= लिम ( 10 )

10 .

*एच* → 0 *एच*

*एच* → 0

उदाहरण 10 खोजो यौगिक का *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* 2 *.*

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* )

समाधान हम पास होना, *एफ* ' ( *एक्स* ) =

लिम

*एच* → 0 *एच*

(

= लिम

*एच* → 0

+ *एच* ) 2 − ( *एक्स* ) 2

*एच*

लिम ( *एच*

*एच* → 0

=

2 *एक्स* ) = 2 *एक्स*

उदाहरण 11 खोजो यौगिक का स्थिर समारोह *एफ* ( *एक्स* ) = *ए* के लिए ए तय असली संख्या *ए* ।

समाधान हम पास होना, *एफ* ' ( *एक्स* ) =

लिम

*एच* → 0

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* ) *एच*

= लिम *एक*  लिम *\_* 0 = 0

जैसा *एच* ≠ 0

*एच* → 0 *एच*  *एच* → 0 *एच*

1

उदाहरण 12 खोजो यौगिक का *एफ* ( *एक्स* ) =

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* )

समाधान हम पास होना *एफ* ' ( *एक्स* ) =

लिम

*एच* → 0 *एच*

11 \_

= लिम ( + *ज* ) *एक्स*

*एच* → 0 *एच*

1  − ( *एक्स* + *एच* ) 

= लिम  

*एच* → 0 *एच*  

*एक्स* ( *एक्स* + *एच* )  

लिम 1  − *ज*  



= *एच* → 0 *एच एक्स* ( *एक्स* + *एच* )

लिम

=

*एच* → 0

11 \_

( *एक्स* + *ज* ) = 2

−

  

244 गणित

* + 1. *कार्यों के व्युत्पन्न का बीजगणित* डेरिवेटिव की परिभाषा के बाद से प्रत्यक्ष रूप से सीमाएँ शामिल करने पर, हम अपेक्षा करते हैं कि डेरिवेटिव के लिए नियमों का पालन किया जाएगा निकट से वह का सीमाएं. हम इकट्ठा करना इन में अगले प्रमेय.

प्रमेय 5 मान लीजिए कि *f* और *g* दो फलन हैं जैसे कि उनके अवकलज a में परिभाषित हैं सामान्य कार्यक्षेत्र। तब

#### दो फलनों के योग का व्युत्पन्न, उनके व्युत्पन्नों का योग होता है कार्य.

*डी*   *एफ* ( *एक्स* ) + *जी* ( *एक्स* ) = *डी एफ* ( *एक्स* ) + *डी जी* ( *एक्स* ) *.*

*डीएक्स*  *डीएक्स*  *डीएक्स*

* + - 1. यौगिक का अंतर का दो कार्य है अंतर का डेरिवेटिव का कार्य.

*डी*   *एफ* ( *एक्स* ) − *जी* ( *एक्स* )   = *डी* *एफ* ( *एक्स* ) − *डी* *जी* ( *एक्स* ) *.*

*डीएक्स*  *डीएक्स*  *डीएक्स*

* + - 1. यौगिक का उत्पाद का दो कार्य है दिया गया द्वारा अगले *उत्पाद नियम।*

*डी*   *एफ* ( *एक्स* ) *जी* ( *एक्स* )   = *डी* *एफ* ( *एक्स* ) . *जी* ( *एक्स* ) + *एफ* ( *एक्स* ) . *डी* *जी* ( *एक्स* )

*डीएक्स*  *डीएक्स*  *डीएक्स*

* + - 1. यौगिक का भागफल का दो कार्य है दिया गया द्वारा अगले *भागफल नियम* (जब कभी भी भाजक है गैर-शून्य)।

  *डी एफ* ( *एक्स* ) . *जी* ( *एक्स* ) − *एफ* ( *एक्स* ) *डी जी* ( *एक्स* )

*डी*  *एफ* ( *एक्स* )  = *डीएक्स*  *डीएक्स*

*डीएक्स*  *जी* ( *एक्स* ) 

( *जी* ( *एक्स* ) ) 2

इनके प्रमाण अनिवार्य रूप से सीमाओं के अनुरूप प्रमेय से अनुसरण करते हैं। हम इच्छा नहीं सिद्ध करना इन यहाँ। जैसा में मामला का सीमा यह प्रमेय कहता है हम कैसे को गणना विशेष प्रकार के कार्यों के व्युत्पन्न। प्रमेय में अंतिम दो कथन हो सकते हैं होना फिर से बताने से में अगले पहनावा कौन एड्स में को याद करते हुए उन्हें आसानी से:

होने देना

= *एफ* ( *एक्स* ) और *वी* = *जी* ( *एक्स* )। तब

( *यूवी* ) =

" *वी* + *यूवी* ''

यह है निर्दिष्ट को ए लीबनिट्ज़ नियम के लिए फर्क उत्पाद का कार्य या उत्पाद नियम। इसी प्रकार, भागफल नियम है

सीमा और डेरिवेटिव 245

  "

  =

 

*वी यूवी* '' *वि* 2

अब, होने देना हम जूझना डेरिवेटिव का कुछ मानक कार्य.

यह है आसान को देखना वह यौगिक का समारोह *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* है स्थिर

समारोह 1. यह है क्योंकि *एफ* ( \_ *एक्स* ) =

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* )

लिम

= लिम + *एच* − *एक्स*

*एच* → 0 *एच*

lim1 1

.

=

*एच* → 0

*एच* → 0 *एच*

हम इसका उपयोग करें और उपरोक्त प्रमेय व्युत्पन्न की गणना करने के लिए का

*एफ* ( *एक्स* ) = 10 *एक्स* = *एक्स* + + *एक्स* (दस शर्तें)। द्वारा ( *मैं* ) का ऊपर प्रमेय

*डीएफ* ( *एक्स* ) *डी*

(

*डीएक्स*  *= डीएक्स*

+ ... + *एक्स* )

(दस शर्तें)

= *डी*  + . . . + *डी एक्स* (दस शर्तें)

*डीएक्स*  *डीएक्स*

= 1 ... + 1 (दस शर्तें) = 10.

हम टिप्पणी वह यह आप LIMIT मई होना का मूल्यांकन का उपयोग करते हुए उत्पाद नियम बहुत। लिखना *एफ* ( *एक्स* ) = 10 *एक्स* = *uv* , जहां *u* हर जगह 10 मान लेने वाला स्थिर कार्य है *वी* ( *एक्स* ) = *एक्स* . यहां, *f* ( *x* ) = 10 *x* = *uv हम जानते हैं कि u* का अवकलज 0 के बराबर है। का व्युत्पन्न *वी* ( *एक्स* ) = *एक्स* के बराबर होती है 1. इस प्रकार द्वारा उत्पाद नियम हम पास होना

*एफ* ( \_ *एक्स* ) = ( 10 *x* ) ''

( *यूवी* ) '' = *यू'वी* \_ *\_* + *यूवी* '' = 0. *एक्स* +10.1 = 10

पर समान पंक्तियां यौगिक का *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* 2 मई होना मूल्यांकन किया गया। हम पास होना

*एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स* 2 = *एक्स ।एक्स* और इस तरह

*डीएफ*  *डी*  *डी*  *डी*

(

= . *एक्स* ) = ( *एक्स* ) । *एक्स* + *एक्स* ।

( *एक्स* )

*डीएक्स*  *डीएक्स*  *डीएक्स*  *डीएक्स*

= 1. *एक्स* .1 = 2 *एक्स* .

अधिक आम तौर पर, हम पास होना अगले प्रमेय.

प्रमेय 6 यौगिक का *एफ* ( *एक्स* ) = *एक्स एन* है *एनएक्स एन* – 1 के लिए कोई सकारात्मक पूर्णांक *एन।*

सबूत द्वारा परिभाषा का यौगिक समारोह, हम पास होना

*एफ* ' ( *एक्स* ) = लिम

*एच* → 0

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* ) *एच*

### (

= लिम

*एच* → 0

+ *ज* ) *एन* − *एक्स एन*

.

*एच*

246 गणित

द्विपद प्रमेय बताता है वह ( *एक्स* + *ज* ) *एन* = ( *एन* सी 0 )

इस तरह ( *एक्स* + *ज* ) *एन* – *एक्स एन* = *एच* ( *एनएक्स एन* – 1 +... + *एच एन* – 1 ) *.* इस प्रकार

*एन* + ( *एन* सी 1 ) *एक्स एन* - 1 *एच* + ... + ( *एन* सी *एन* ) *एच एन* और

*डीएफ* ( *एक्स* ) (

= लिम

*dx*

*एच* → 0

*ज* ) *एन* − *एक्स एन*

*एच*

= लिम

*एच* → 0

*एच* ( *एनएक्स एन* − 1 + + *एच एन* − 1 )

*एच*

= लिम ( *एन एक्स एन* पहला + ... + *एच एन* − 1 ) =

*h*→0

*एक्स एन* पहला .

*n* पर प्रेरण और उत्पाद नियम द्वारा भी सिद्ध कर सकते हैं अनुसरण करता है। परिणाम क्या सच है *एन* = के लिए 1, जो है गया पहले साबित हुआ. हम पास होना

*डी*  *एन*

(

)

*डीएक्स*  *=*

=

*डी*  *एक्स* . *एक्स एन* − 1

( )

*डीएक्स*

*डी* ( *एक्स* ) । ( *एक्स एन* − 1 ) + *एक्स* । *डी*

( *एक्स एन* − 1 ) (द्वारा उत्पाद नियम)

*डीएक्स*  *डीएक्स*

= 1. *एक्स एन* − 1 + *एक्स* । ( ( *एन* − 1 ) *एक्स एन* − 2 ) (द्वारा प्रेरण परिकल्पना)

= *एन* − 1 + ( *एन* - 1 ) *एक्स एन* − 1 = *एन एक्स एन* − 1 .

*टिप्पणी*  ऊपर प्रमेय है सत्य के लिए सभी शक्तियां का *एक्स,* अर्थात, *एन* कर सकना कोई भी हो असली संख्या (लेकिन हम इच्छा नहीं सिद्ध करना यह यहाँ)।

* + 1. *यौगिक का बहुआयामी पद और त्रिकोणमितीय कार्य* हम शुरू साथ अगले प्रमेय कौन कहता है हम यौगिक का ए बहुपद समारोह।

प्रमेय 7 होने देना *एफ(एक्स)* = *एक \_ एक्स एन*  *ए एन* - 1 *एक्स एन* - 1 + .... + *एक* 1 *एक्स* + *एक* 0 होना ए बहुपद समारोह, कहाँ

*एक मैं एस* हैं सभी असली नंबर और *ए एन*  0. तब, यौगिक समारोह है दिया गया द्वारा

*डीएफ* ( *एक्स* ) *डीएक्स*

*ना एन एक्स एन* − 1 + ( *एन* − 1 ) *ए एन* − 1 *एक्स एक्स* − 2 + ... +

2 2 *एक्स*  *ए* 1 *.*

सबूत का यह प्रमेय है अभी डाल एक साथ भाग (मैं) का प्रमेय 5 और प्रमेय 6.

उदाहरण 13 गणना करना यौगिक का 6 *x* 100 – *x* 55 + *एक्स* ।

समाधान ए प्रत्यक्ष आवेदन का ऊपर प्रमेय कहता है वह यौगिक का

ऊपर समारोह है 600 *x* 99

55 *x* 54 + 1 .

सीमा और डेरिवेटिव 247

उदाहरण 14 खोजो यौगिक का *एफ* ( *एक्स* ) = 1 + *एक्स* + *एक्स* 2 + *एक्स* 3 +... + *x* 50 पर *एक्स* = 1.

समाधान ए प्रत्यक्ष आवेदन का ऊपर प्रमेय 6 कहता है वह यौगिक का ऊपर समारोह है 1 + 2 *एक्स* + 3 *x* 2 + . . . + 50 *x* 49 *.* पर *एक्स* = 1 कीमत का यह समारोह के बराबर होती है

( 50 )( 51 )

1 + 2(1) + 3(1) 2 + .. . + 50(1) 49 = 1 + 2 + 3 + . . . + 50 =

2

= 1275.

+1

उदाहरण 15 खोजो यौगिक का *एफ* ( *एक्स* ) =

समाधान स्पष्ट रूप से यह समारोह है परिभाषित हर जगह के अलावा पर *एक्स* = 0. हम उपयोग भागफल नियम साथ *यू* = *एक्स* + 1 और *वी* = *एक्स* । इस तरह *तुम ''* = 1 और *वी ''* = 1. इसलिए

*डीएफ* ( *एक्स* ) = *डी*  *एक्स* + 1  = *डी*  *यू*  = *यू'वी* \_ *\_* − *यूवी* '' = 1 ( *एक्स* ) − ( *एक्स* +1 ) 1 = − 1

*डीएक्स*  *डीएक्स*  *एक्स* 

*डीएक्स*  *वी* 

2 2 2

    *x*  *x*

उदाहरण 16 गणना करना यौगिक का पाप *एक्स* ।

समाधान होने देना *एफ* ( *एक्स* ) = पाप *एक्स* । तब

*डीएफ* ( *एक्स* ) *डीएक्स*

= लिम

*एच* → 0

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* ) *एच*

=लिम

*एच* → 0

पाप ( *एक्स* + *एच* ) − पाप ( *एक्स* ) *एच*

2cos  2

+ *एच*  एस आई एन  *एच* 

 2   2 

= लिम

*एच* → 0

    (का उपयोग करते हुए FORMULA के लिए पाप ए – पाप बी)

*एच*

मैं मैं हूँ सी ओ एस 

+ *एच*  . मैं मैं हूँ

पाप *एच*

2 = क्योंकि *एक्स* .1 = क्योंकि *एक्स*

= *एच* → 0  2  *एच* → 0 *एच*  .

 

2

उदाहरण 17 गणना करना यौगिक का टैन *एक्स।*

समाधान होने देना *एफ* ( *एक्स* ) = टैन *एक्स* । तब

*डीएफ* ( *एक्स* ) *डीएक्स*

= लिम

*एच* → 0

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* ) *एच*

= लिम

*एच* → 0

टैन ( *एक्स* + *एच* ) − टैन ( *एक्स* ) *एच*

1  पाप ( *एक्स* + *एच* )

पाप 

= लिम

*एच* → 0 *ज* 

ओएस ( *एक्स* + *एच* )

– 

ओल *एक्स*  

248 गणित

= लिम

 पाप ( + *ज* ) क्योंकि *एक्स* − क्योंकि ( *एक्स* + *ज* ) पाप *एक्स* 



*एच* → 0 

*एच* क्योंकि ( *एक्स* + *ज* ) क्योंकि *एक्स*   

= लिम

पाप ( + *एच* − *एक्स* )

(का उपयोग करते हुए FORMULA के लिए पाप (ए + बी))

*एच* → 0 *एच*

ओएस ( *एक्स* + *ज* ) क्योंकि *एक्स*

= लिम पाप *एच* .लिम 1

*एच* → 0 *एच*

*एच* → 0 क्योंकि ( *एक्स* + *ज* ) क्योंकि *एक्स*

= 1.

1

क्योंकि 2 *एक्स*

= सेकंड 2  .

उदाहरण 18 गणना करना यौगिक का *एफ* ( *एक्स* ) = पाप 2 *एक्स* ।

समाधान हम उपयोग करते हैं लीबनिट्ज़ उत्पाद मूल्यांकन करने का नियम यह।

*डीएफ* ( *एक्स* ) =

*डी* ( पाप पाप *एक्स* )

*डीएक्स*  *डीएक्स*

= ( पाप

= ( क्योंकि

) '' पाप *एक्स* + पाप *एक्स* ( पाप *एक्स* ) '

) बिना *एक्स* + बिना *एक्स* ( क्योंकि *एक्स* )

2 बिना ओल *एक्स* = बिना 2x *\_* .

EXERCISE 12.2

1. खोजें यौगिक *x* 2 का – 2 पर *एक्स* = 10.
2. खोजो का व्युत्पन्न *एक्स* पर *एक्स* = 1.
3. खोजो यौगिक का 99 *एक्स* पर *एक्स* = l00.
4. खोजो यौगिक का अगले कार्य से पहला सिद्धांत.
   1. *x* 3 27

1

(ii) ( *एक्स* - 1 )( *एक्स* − 2 )

+1

1. 2
2. के लिए समारोह

*x* 100

*x* 99

1. 1

*एक्स* 2

*एफ* ( *एक्स* ) = + + . . . + + *एक्स* + 1 .

100 99 2

सिद्ध करना वह

*एफ* ( 1 ) = 100 *एफ* ' ( 0 ) .

सीमा और डेरिवेटिव 249

1. खोजें यौगिक का संख्या *ए* ।

*कुल्हाड़ी एन* - 1 + *एक* 2 *एक्स एन* − 2 + . . . + *ए एन* - 1 *एक्स* + *एक \_*

के लिए कुछ तय असली

1. के लिए कुछ स्थिरांक *ए* और *बी* , खोजें का व्युत्पन्न
   1. ( *ए* ) ( *एक्स* − *बी* )
   2. ( *एक्स* 2 + *ख* ) 2

*एन* − *एक \_*

*ए*

* 1. *बी*

1. खोजो यौगिक का
2. खोजो यौगिक का
   1. 2 *x*  3 4

– *एक*  के लिए कुछ स्थिर *ए* ।

(ii) ( 5 *x* 3 + 3x *\_* - 1 ) ( *एक्स* - 1 )

(iii)

- 3 ( 5 + 3 *एक्स* )

(iv)

5 ( 3 − 6 *एक्स* − 9 )

(v ) -4 ( 3 − 4 *एक्स* − 5 )

(वी)

2 − 2

1 3 *एक्स* − 1

1. खोजो यौगिक का ओल *एक्स* से पहला सिद्धांत.
2. खोजो यौगिक का अगले कार्य:
   1. पाप *एक्स* ओल *एक्स*  (ii) ईसी (iii) 5 सेकंड *एक्स*

4 ओल *एक्स*

(iv) कोसेक *x*  (v) 3cot + 5cosec *एक्स*

1. 5पाप *एक्स* − 6 ओल *एक्स* +7 \_
2. 2 टैन

* 7 सेकंड *एक्स*

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 19 खोजो यौगिक बंद *\_* से पहला सिद्धांत, जहाँ *एफ* है दिया गया द्वारा

2 *एक्स* + 3

1. *एफ* ( *एक्स* ) =
2. *एफ* ( *एक्स* ) =

*एक्स* + 1

*एक्स*  2 *एक्स*

समाधान (मैं) टिप्पणी वह समारोह है नहीं परिभाषित पर *एक्स* = 2. लेकिन, हम पास होना

2 ( *एक्स* + *एच* ) + 3 − 2 *x*  3

*एफ* ( \_ *एक्स* ) = लिम *एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* ) = लिम *एक्स* + *एच* − 2 *एक्स* − 2

*एच* → 0 *एच*  *एच* → 0 *एच*

250 गणित

( 2 *एक्स* + 2 *घंटे* + 3 )( *एक्स* − 2 ) − ( 2 *एक्स* + 3 )( *एक्स* + *एच* − 2 )

लिम

=

*एच* → 0

लिम

=

*एच* → 0

*एच* ( *एक्स* − 2 )( *एक्स* + *एच* − 2 )

( 2 *एक्स* + 3 )( *एक्स* − 2 ) + 2 *घंटे* ( *एक्स* − 2 ) − ( 2 *एक्स* + 3 )( *एक्स* − 2 ) − *एच* ( 2 *एक्स* + 3 )

*एच* ( *एक्स* − 2 )( *एक्स* + *एच* − 2 )

लिम

–7 = − 7

= *एच* → 0 ( *एक्स* − 2 ) ( *एक्स* + *एच* − 2 ) ( *एक्स* − 2 ) 2

दोबारा, टिप्पणी वह समारोह *एफ* " है भी नहीं परिभाषित पर *एक्स* = 2.

(ii) द फ़ंक्शन को यहां परिभाषित नहीं किया गया है *एक्स* = 0. लेकिन, हमारे पास है

 *एक्स* + *एच* +

1 \_ −  *एक्स* + 1 

*एफ* ( \_ *एक्स* )

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* )

= लिम

लिम 

+ *एच*   *एक्स* 

*एच* → 0 *एच*

= लिम 1  *एच* +1 \_

=

– 1 

*एच* → 0

  

*एच*

*एच* → 0 *एच* 

1 

*एक्स* + *एच*  *एक्स*  

*एक्स* − *एक्स* − *एच* 

1  

1 \_ \_

= मैं मैं हूँ *एच*  *एच* + *एक्स* ( *एक्स* + *एच* )  = मैं मैं हूँ *एच*

*एच* 1 − \_ *एक्स* ( *एक्स* + *एच* )  

*एच* → 0     *एच* → 0

 1  1

    

= मैं मैं हूँ  1 −

( )

*एच* → 0  

 = 1 −

*एक्स एक्स* + *एच*   2

दोबारा, टिप्पणी वह समारोह *एफ* " है नहीं परिभाषित पर *एक्स* = 0.

उदाहरण 20 खोजो यौगिक का *एफ(एक्स)* से पहला सिद्धांत, कहाँ *एफ(एक्स)* है

1. में + ओल *एक्स*
2. *एक्स* पाप *एक्स*

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* )

समाधान (मैं) हम पास होना

*एफ* ( *एक्स* ) =

*एच*

= लिम

*एच* → 0

पाप ( + *ज* ) + क्योंकि ( *एक्स* + *ज* ) − पाप *एक्स* − ओल *एक्स एच*

= लिम कोई बात नहीं *एच* + ओल *x* बिना *एच* + ओल *एक्स* ओल *एच* − बिना *एक्स* बिना *एच* − बिना *एक्स* − ओल *एक्स*

*एच* → 0 *एच*

= लिम

*एच* → 0

सीमा और डेरिवेटिव 251

में *एच* ( क्योंकि *एक्स*  पाप *एक्स* ) + पाप *एक्स* ( क्योंकि *एच* - 1 ) + ओल *एक्स* ( क्योंकि *एच* - 1 ) *एच*

syn *एच*  ( ओएस *एच* 1 )

( − +)

= लिम कॉस *एक्स*  पाप *एक्स*  लिमसिन *एक्स*

+ लिम ओल *एक्स* ( क्योंकि *एच* 1 )

*एच* → 0 *एच*

*एच* → 0

*एच*  *एच* → 0 *एच*

= ओएस पाप *एक्स*

*एफ* ( *एक्स* + *एच* ) − *एफ* ( *एक्स* ) ( *एक्स* + *ज* ) पाप ( *एक्स* + *एच* ) − *एक्स* पाप *एक्स*

(ii)

*एफ* ( *एक्स* )

= गोंद

*एच* → 0 *एच*

= गोंद

*एच* → 0 *एच*

= गोंद

*एच* → 0

= गोंद

*एच* → 0

( + *ज* )( पाप *एक्स* ओल *एच* + पाप *एच* ओल *एक्स* ) − *एक्स* पाप *एक्स एच*

में *एक्स* ( क्योंकि *एच* - 1 ) + *एक्स* ओल *एक्स* पाप *एच* + *एच* ( पाप *एक्स* ओल *एच* + पाप *एच* ओल *एक्स* ) *एच*

= लिम

*एक्स* पाप *एक्स* ( क्योंकि *एच* - 1 )

+ लिम *एच* → 0 *एक्स* ओल *एक्स*

में *एच*

+ लिम ( पाप *एक्स* ओल *एच* + पाप *एच* ओल *एक्स* )

*एच* → 0

*एच*  *एच*  *एच* → 0

= *एक्स* ओल *एक्स* + पाप *एक्स*

उदाहरण 21 गणना करना यौगिक का

1. *एफ* ( *एक्स* ) = पाप 2 *एक्स*  (ii) *जी* ( *एक्स* ) = खाट *एक्स*

समाधान (मैं) को याद करें त्रिकोणमितीय सूत्र पाप 2 *एक्स* = 2 पाप *एक्स* ओल *एक्स* । इस प्रकार

*डीएफ* ( *एक्स* )

=

*डी* ( 2पाप) ओल *एक्स* ) = 2 *डी*

( पाप *एक्स* ओल *एक्स* )

*डीएक्स*  *डीएक्स*  *डीएक्स*

= 2  ( s में





) '' ओल *एक्स* + बिना *एक्स* ( क्योंकि *एक्स* ) ' 





= 2   ( सी ओएस *एक्स* ) सी ओएस *एक्स* + एस आई एन *एक्स* ( - एस आई एन *एक्स* )  

= 2 ( क्योंकि 2

1. द्वारा परिभाषा, जी( *एक्स* ) =

* पाप 2 *एक्स* )

खाट *एक्स* = ओल

पाप

. हम उपयोग भागफल नियम पर यह समारोह

जहां कहीं भी यह है परिभाषित।



*डीजी* = *डी*

(खाट *एक्स* ) = *डी*

 ओल *एक्स* 

*डीएक्स*  *डीएक्स*  *डीएक्स*  पाप *एक्स* 

252 गणित

(क्योंकि) ) ' (बिना *एक्स* ) (क्योंकि) *x* )(बिना *एक्स* ) '

= (बिना *एक्स* ) 2

( - बिना )(बिना *एक्स* ) − (क्योंकि *x* )(क्योंकि *एक्स* )

= (पाप *एक्स* ) 2

– पाप 2 *एक्स* + क्योंकि 2 *एक्स* = −

= 2

पाप *एक्स*

ओसेक 2

वैकल्पिक रूप से, यह मई होना गणना द्वारा ध्यान देने योग्य बात वह खाट *एक्स* =

1

टैन *एक्स*

. यहाँ, हम उपयोग तथ्य

वह यौगिक का *टैन एक्स* है *सेकंड 2 एक्स* कौन हम देखा में उदाहरण 17 और भी वह यौगिक का स्थिर समारोह है 0.

 

*डीजी*  *डी*

=

(खाट *एक्स* ) = *डी* 1 \_ 

*डीएक्स*  *डीएक्स*  *डीएक्स*  टैन *एक्स* 

(1) '' (तन *एक्स* ) (1)(तन *एक्स* ) '

= (टैन *एक्स* ) 2

(0)(तन ) − (सेकंड *एक्स* ) 2

= (टैन *एक्स* ) 2

− सेकंड 2 *एक्स*

= −

= तन 2 *एक्स*

ओसेक 2

उदाहरण 22 खोजो यौगिक का

5 − ओएस *एक्स*  + ओएस *एक्स*

1. में

टैन

5 − ओएस *एक्स*

समाधान (i) होने देना *एच* ( *एक्स* ) = . हम उपयोग भागफल नियम पर यह समारोह जहां कहीं भी

पाप

यह है परिभाषित।

*एच* ' ( *एक्स* ) = (

5 − ओल *एक्स* ) पाप *एक्स* − ( *एक्स* 5 − ओल *x* )(पाप *एक्स* ) '

(पाप *एक्स* ) 2

सीमा और डेरिवेटिव 253

(5 4 + पाप *एक्स* ) पाप *एक्स* − ( *एक्स* 5 − ओल *एक्स* ) ओल *एक्स*

= पाप 2 *एक्स*

– 5 ओएस *एक्स* + 5 *x* 4 पाप *एक्स* + 1

= (पाप *एक्स* ) 2

(ii) हम उपयोग भागफल नियम पर समारोह

ओएस *एक्स*

टैन

जहां कहीं भी यह है परिभाषित।

*एच* ' ( *एक्स* ) = (

+ क्योंकि *x* ) ' टैन *एक्स* − ( *एक्स* + ओल *x* )(टैन *एक्स* ) '

(इसलिए *एक्स* ) 2

(1 − बिना ) इसलिए *एक्स* − ( *एक्स* + ओल *एक्स* ) सेकंड 2 *एक्स*

= (तो *एक्स* ) 2

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 12

1. खोजो यौगिक का अगले कार्य से पहला सिद्धांत:
   1. *एक्स*  (ii)

( − ) 1

π

(iii) पाप ( *एक्स* + 1) (iv) ओल ( *एक्स* – 8 )

खोजो यौगिक का अगले कार्य (यह है को होना समझा वह *ए, बी, सी, डी, पी, क्यू, आर* और *एस* हैं तय शून्येतर स्थिरांक और *एम* और *एन* हैं पूर्णांक):

 *आर*  

2. ( *एक्स + ए* ) 3. ( *पीएक्स* + *क्यू* )  *एक्स*  



4. (

*एक्स* + *बी* ) ( *सी एक्स* + *डी* ) 2

*कुल्हाड़ी* + *बी*

5. *एक्स* + *डी*

11 \_

6. 1

1

1. *एक्स* 2

1

*बीएक्स* + *सी*

*कुल्हाड़ी* + *बी*

1. *पीएक्स* 2 + *क्यूएक्स* + *आर*

*पीएक्स* 2 + *क्यूएक्स* + *आर*

1. *एक्स* + *बी*

*ए* − *बी* + ओएस

*x* 4 *x* 2

 + *बी* ) ( *सीएक्स* + *डी* ) *एम*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 11. | 4 *x* − 2 | 12. | ( *x* + *b*)*n* | 13. ( *x* |
| 14. | sin (*x + a*) | 15. | cosec *x* cot *x* | os  16. 1+ s |

में

254 गणित

17.

बिना बिना

+ ओल *एक्स*

* ओल *एक्स*

18.

सेकंड 1

सेकंड 1 19. बिना *एन*

20.

*ए* + *बी* पाप *एक्स सी* + *डी* ओएस *एक्स*

पाप( + *ए* )

1. ओएस
2. 4 (5पाप) *एक्स* − 3cos *एक्स* )

23. (

2 + 1 ) क्योंकि *एक्स*

24. (

*एक्स* 2 + पाप *एक्स* ) ( *पी* + *क्यू* ओल *एक्स* )

25. (

+ ओल *एक्स* ) ( *एक्स* − टैन *एक्स* )

*एक्स*

26.

4 *एक्स* + 5पाप *एक्स*

3 + 7cos *एक्स*

27.

*एक्स* 2 ओल  

 4 



पाप

*एक्स*

28. 1+ टैन *एक्स*

29. (

+ सेकंड *एक्स* ) ( *एक्स* − टैन *एक्स* )

30. पाप *एन एक्स*

*Summary*

�The expected value of the function as dictated by the points to the left of a point defines the left hand limit of the function at that point. Similarly the right hand limit.

�Limit of a function at a point is the common value of the left and right hand

limits, if they coincide.

�For a function *f* and a real number *a*, lim *f*(*x*) and *f* (*a*) may not be same (In

*x*→*a*

fact, one may be defined and not the other one).

�For functions *f* and *g* the following holds:

lim[ *f* (*x*) ± *g*(*x*)]= lim *f* (*x*) ± lim *g*(*x*)

*x*→*a*

*x*→*a*

*x*→*a*

lim[ *f* (*x*). *g* (*x*)]= lim *f* (*x*).lim *g* (*x*)

*x*→*a*

*x*→*a*

*x*→*a*

lim *f* (*x*)

lim 

 *f* (*x*) 

*x*→*a*

�Following are some of the standard limits

*x*→*a*  *g*(*x*)  lim *g*(*x*)

 = *x*→*a*

lim

*x*→*a*

*xn* − *an*

– *a*

= *a*

*n* 1

सीमा और डेरिवेटिव 255

lim sin *x*

*x*→0

1

lim 1

cos *x*

*x*→0

0

�The derivative of a function *f* at *a* is defined by

*f* ′(*a*) =lim *f* (*a* + *h*) − *f* (*a*)

*h*→0

*h*

�Derivative of a function *f* at any point *x* is defined by

*f* ′(*x*) = *df* (*x*) =lim *f* (*x* + *h*) − *f* (*x*)

*dx*

*h*→0

*h*

�For functions *u* and *v* the following holds:

( ± *v*) = *u*′ ± *v*′

( *v*)′ *u*′*v* + *uv*′

 *v* 

 

 *u* ′ = *u* *v* −*uv*′ provided all are defined.

*v*2

�Following are some of the standard derivatives.

*dx*

*d* ( *n* ) = *nxn* 1

*dx*

*d* (sin ) =cos *x*

*dx*

*d* (cos ) =− sin *x*

*Historical Note*

In the history of mathematics two names are prominent to share the credit for inventing calculus, Issac Newton (1642 – 1727) and G.W. Leibnitz (1646 – 1717). Both of them independently invented calculus around the seventeenth century. After the advent of calculus many mathematicians contributed for further development of calculus. The rigorous concept is mainly attributed to the great

256 गणित

mathematicians, A.L. Cauchy, J.L.Lagrange and Karl Weierstrass. Cauchy gave the foundation of calculus as we have now generally accepted in our textbooks. Cauchy used D’ Alembert’s limit concept to define the derivative of a function. Starting with definition of a limit, Cauchy gave examples such as the limit of

sin

for *α* = 0. He wrote

∆ *y* *f* (*x* + *i*) − *f* (*x*)

∆ *x* =

*i*

and called the limit for

*i* → 0, the “function derive’e, *y*′ for *f* ′ (*x*)”.

Before 1900, it was thought that calculus is quite difficult to teach. So calculus became beyond the reach of youngsters. But just in 1900, John Perry and others in England started propagating the view that essential ideas and methods of calculus were simple and could be taught even in schools. F.L. Griffin, pioneered the teaching of calculus to first year students. This was regarded as one of the most daring act in those days.

Today not only the mathematics but many other subjects such as Physics, Chemistry, Economics and Biological Sciences are enjoying the fruits of calculus.

— **�** —

## अध्याय 13

STATISTICS

*“ सांख्यिकी को उचित रूप से औसत और उनका विज्ञान कहा जा सकता है अनुमान।"* – *एल्बोले & अल बोडिंगटन* �

#### परिचय

हम जानना वह आंकड़े सौदा साथ डेटा एकत्र किया हुआ के लिए विशिष्ट उद्देश्य. हम कर सकना बनाना फैसले के बारे में डेटा द्वारा इसका विश्लेषण और व्याख्या करना। पिछली कक्षाओं में, हमारे पास है ग्राफ़िक रूप से और में डेटा का प्रतिनिधित्व करने के तरीकों का अध्ययन किया सारणीबद्ध प्रपत्र। यह प्रस्तुतिकरण कुछ खास बातें उजागर करता है विशेषताएँ या विशेषताएँ का डेटा। हम पास होना भी अध्ययन तरीकों का खोज ए प्रतिनिधि कीमत के लिए दिया गया डेटा। इस मान को केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप कहा जाता है। याद करना अर्थ (अंकगणित अर्थ), MEDIAN और तरीका हैं तीन पैमाने का केंद्रीय प्रवृत्ति। ए *उपाय का केंद्रीय प्रवृत्ति* हमें एक मोटा अंदाज़ा देती है कि डेटा बिंदु कहाँ हैं केन्द्रित. लेकिन, में आदेश को बनाना बेहतर व्याख्या से

कार्ल पियर्सन (1857-1936)

डेटा, हम चाहिए भी पास होना एक विचार कैसे डेटा हैं बिखरा हुआ या कैसे अधिकता वे हैं जब तुम्हारे पास आस-पास ए उपाय का केंद्रीय प्रवृत्ति।

विचार करना अब रन रन बनाए द्वारा दो बल्लेबाजों में उनका अंतिम दस माचिस जैसा इस प्रकार है: बल्लेबाज ए : 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

बल्लेबाज बी : 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

जाहिर है, मतलब और मध्यिका आंकड़ा हैं

बल्लेबाज एक बल्लेबाज बी

मतलब 53 53

माध्य 53 53

याद करना वह, हम calculate अर्थ का ए डेटा (संकेतित द्वारा *एक्स* ) द्वारा डिवाइडिंग जोड़ का टिप्पणियों द्वारा संख्या का अवलोकन, अर्थात,

258 गणित

= 1 *एन एक्स एन मैं* = 1

∑

*i*

भी, MEDIAN है प्राप्त किया द्वारा पहला की व्यवस्था डेटा में आरोही या अवरोही आदेश और आवेदन अगले नियम।

 *एन* + 1  टी एच

अगर संख्या का टिप्पणियों है विषम, तब MEDIAN है  2  अवलोकन.



  टी एच

अगर संख्या का टिप्पणियों है यहां तक की, तब MEDIAN है अर्थ  का

2





 *एन*   टी एच

और

 2 + 1 



अवलोकन.

हम खोजो वह अर्थ और MEDIAN का रन रन बनाए द्वारा दोनों बल्लेबाजों ए और बी हैं वही अर्थात, 53. कर सकना हम कहना वह प्रदर्शन का दो खिलाड़ियों है वही? स्पष्ट रूप से नहीं, क्योंकि बल्लेबाज ए के स्कोर में परिवर्तनशीलता 0 (न्यूनतम) से 117 तक है (अधिकतम)। जबकि, श्रेणी का रन बनाये द्वारा बल्लेबाज बी है से 46 को 60.

होने देना हम अब कथानक ऊपर स्कोर जैसा डॉट्स पर ए संख्या रेखा। हम खोजो अगले आरेख:

के लिए बल्लेबाज ए

के लिए बल्लेबाज बी

अंजीर 13.1

अंजीर 13.2

हम कर सकना देखना वह डॉट्स संगत को बल्लेबाज बी हैं बंद करना को प्रत्येक अन्य और हैं क्लस्टरिंग आस-पास उपाय का केंद्रीय प्रवृत्ति (अर्थ और माध्यिका), जबकि वे संगत को बल्लेबाज ए हैं बिखरा हुआ या अधिक फैलाना बाहर।

इस प्रकार, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप पूर्णता देने के लिए पर्याप्त नहीं हैं किसी दिए गए डेटा के बारे में जानकारी. परिवर्तनशीलता एक अन्य कारक है जो होना आवश्यक है सांख्यिकी के अंतर्गत अध्ययन किया गया। ' *केंद्रीय प्रवृत्ति के माप* ' की तरह हम एक चाहते हैं परिवर्तनशीलता का वर्णन करने के लिए एकल संख्या। इस एकल संख्या को ' *माप' कहा जाता है फैलाव* '. में यह अध्याय, हम करेगा सीखना कुछ का महत्वपूर्ण पैमाने का फैलाव और उनका तरीकों का गणना के लिए असमूहीकृत और वर्गीकृत किया डेटा।

सांख्यिकी 259

#### पैमाने का फैलाव

फैलाव या बिखराव में ए डेटा है मापा पर आधार का टिप्पणियों और प्रकार का उपाय का केंद्रीय प्रवृत्ति, इस्तेमाल किया गया वहाँ। वहाँ हैं अगले पैमाने का फैलाव:

* + 1. श्रेणी, (ii) चतुर्थांश विचलन, (iii) अर्थ विचलन, (iv) मानक विचलन।

इस अध्याय में, हम परिक्षेपण के इन सभी मापों का अध्ययन करेंगे चतुर्थक विचलन।

#### श्रेणी

याद करना वह, में उदाहरण का रन रन बनाए द्वारा दो बल्लेबाजों ए और बी, हम था कुछ विचार का परिवर्तनशीलता में स्कोर पर आधार का न्यूनतम और अधिकतम रन में प्रत्येक शृंखला। को प्राप्त ए अकेला संख्या के लिए यह, हम खोजो अंतर का अधिकतम और न्यूनतम मान का प्रत्येक शृंखला। यह अंतर है बुलाया 'श्रेणी' का डेटा।

में मामला का बल्लेबाज ए, श्रेणी = 117 – 0 = 117 और के लिए बल्लेबाज बी, श्रेणी = 60 – 46 = 14. स्पष्ट रूप से, श्रेणी का ए > रेंज बी का . इसलिए, स्कोर बिखरे हुए या फैले हुए हैं मामला का ए जबकि के लिए बी इन हैं बंद करना को प्रत्येक अन्य।

इस प्रकार, श्रेणी का ए शृंखला = अधिकतम कीमत – न्यूनतम कीमत।

श्रेणी का डेटा देता है हम ए किसी न किसी विचार का परिवर्तनशीलता या बिखराव लेकिन करता है नहीं कहना के बारे में फैलाव का डेटा से ए उपाय का केंद्रीय प्रवृत्ति। के लिए यह उद्देश्य, हम ज़रूरत कुछ अन्य उपाय का परिवर्तनशीलता. स्पष्ट रूप से, ऐसा उपाय अवश्य निर्भर करना ऊपर अंतर (या विचलन) का से मान केंद्रीय प्रवृत्ति।

महत्वपूर्ण पैमाने का फैलाव, कौन निर्भर करना ऊपर विचलन का एक केंद्रीय प्रवृत्ति से अवलोकन माध्य विचलन और मानक विचलन हैं। होने देना हम चर्चा करना उन्हें में विवरण।

#### अर्थ विचलन

याद करना वह विचलन का एक अवलोकन *एक्स* से ए तय कीमत *'ए'* है अंतर *एक्स* – *ए* । में आदेश को खोजो फैलाव का मान का *एक्स* से ए केंद्रीय कीमत *'ए'* , हम खोजो विचलन के बारे में *ए* । एक निरपेक्ष उपाय का फैलाव है अर्थ का इन विचलन. माध्य ज्ञात करने के लिए, हमें विचलनों का योग प्राप्त करना होगा। लेकिन, हम जानते हैं कि ए केंद्रीय प्रवृत्ति का माप अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों के बीच होता है अवलोकनों का सेट. इसलिए, कुछ विचलन नकारात्मक होंगे और कुछ सकारात्मक। इस प्रकार, जोड़ का विचलन मई गायब होना। इसके अतिरिक्त, जोड़ का विचलन से अर्थ ( *एक्स* ) है शून्य।

जोड़ का विचलन

मतलब भी का विचलन

= 0 = 0

संख्या का अवलोकन *एन*

इस प्रकार, खोज अर्थ का विचलन के बारे में अर्थ है नहीं का कोई उपयोग के लिए हम, जैसा दूर जैसा उपाय का फैलाव है संबंधित।

260 गणित

याद करना वह, में खोज ए उपयुक्त उपाय का फैलाव, हम ज़रूरत होना दूरी का प्रत्येक कीमत से ए केंद्रीय प्रवृत्ति या ए तय संख्या ' *ए* '। याद करना, वह निरपेक्ष कीमत का अंतर का दो नंबर देता है दूरी बीच में नंबर कब एक संख्या रेखा पर दर्शाया गया है। इस प्रकार, एक निश्चित से फैलाव का माप ज्ञात करना संख्या ' *ए* ' से हम विचलनों के निरपेक्ष मानों का माध्य ले सकते हैं केंद्रीय कीमत। यह अर्थ है बुलाया ' *अर्थ विचलन* '। इस प्रकार अर्थ विचलन के बारे में ए केंद्रीय कीमत ' *ए* ' है अर्थ का निरपेक्ष मान का विचलन का से अवलोकन ' *ए* '। अर्थ विचलन से ' *ए* ' है लक्षित जैसा एमडी ( *ए* )। इसलिए,

#### जोड़ का निरपेक्ष मान का विचलन से ' *ए* '

एमडी( *ए* ) =

#### संख्या का अवलोकन .

*टिप्पणी* केंद्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप से माध्य विचलन प्राप्त किया जा सकता है। हालाँकि, माध्य और माध्यिका से माध्य विचलन आमतौर पर सांख्यिकीय में उपयोग किया जाता है अध्ययन करते हैं।

होने देना हम अब सीखना कैसे को calculate अर्थ विचलन के बारे में अर्थ और अर्थ के बारे में विचलन MEDIAN के लिए विभिन्न प्रकार का डेटा

* + 1. *अर्थ विचलन के लिए असमूहीकृत डेटा* होने देना *एन* टिप्पणियों होना *एक्स* 1 , *एक्स* 2 , *x* 3 , , *एक्स एन .*

निम्नलिखित कदम वह शामिल में हिसाब का औसत झुकाव के बारे में अर्थ या

माध्यिका:

कदम 1 गणना उपाय का केंद्रीय प्रवृत्ति के बारे में कौन हम हैं को खोजो अर्थ विचलन। होने देना यह होना ' *ए* '।

कदम 2 खोजो विचलन का प्रत्येक *एक्स मैं* से *ए* , अर्थात, *एक्स* 1 – *ए* , *एक्स* 2 – *ए* , *एक्स* 3 – *ए* ,। , *एक्स एन* - *ए*

कदम 3 के निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए विचलन, अर्थात, माइनस गिराओ यदि है तो (-) का चिन्ह लगायें

वहाँ, अर्थात,

*एक्स* 1 − *ए* , *एक्स* 2 − *ए* , *एक्स* 3 − *ए* , , *एक्स एन* − *ए*

कदम 4 खोजो अर्थ का सम्पूर्ण मूल्य का विचलन. यह अर्थ है अर्थ विचलन के बारे में *ए* , अर्थात,

*n*

∑ *मैं*  *एक*

एमडी ( *ए* ) =

*मैं* = 1

*एन*

1 *एन*  *एक्स*

इस प्रकार एम.डी ( ) = *एन*

∑ *मैं*

*मैं* = 1

, कहाँ = अर्थ

1

और एम.डी (एम) = *एन*

*n*

∑ *एक्स मैं*

*मैं* = 1

एम , कहाँ एम = मंझला

सांख्यिकी 261

�Note In this Chapter, we shall use the symbol M to denote median unless stated

otherwise.Let us now illustrate the steps of the above method in following examples.

उदाहरण 1 खोजें औसत झुकाव के बारे में मतलब के लिए निम्नलिखित डेटा:

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

समाधान हम आगे बढ़ना कदम-वार और पाना अगले:

कदम 1 अर्थ का दिया गया डेटा है

*एक्स*  6 + 7 +10 \_ + 12 + 13 + 4 + 8 + 12

= 72 = 9

8 8

कदम 2 विचलन का संबंधित टिप्पणियों से अर्थ , अर्थात, *एक्स मैं* - *एक्स* हैं 6-9, 7-9, 10-9, 12-9, 13-9, 4-9, 8-9, 12-9,

या -3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3

चरण 3 निरपेक्ष मान का विचलन, अर्थात, *एक्स मैं*

3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3

1. हैं

कदम 4 आवश्यक अर्थ विचलन के बारे में अर्थ है

8

∑ *मैं*  *एक्स*

8

एमडी ( ) = *मैं* = 1

= 3 + 2 + 1+ \_ 3 + 4 + 5 + 1+ \_ 3 = 22 = 2 *.* 75

8 8

step-wise without referring to steps.

�Note Instead of carrying out the steps every time, we can carry on calculation,

उदाहरण 2 माध्य ज्ञात कीजिए के बारे में विचलन मतलब के लिए निम्नलिखित डेटा : 12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

समाधान हम पास होना को पहला खोजो अर्थ ( *एक्स* ) का दिया गया डेटा

= 1 ∑ 2 0 *एक्स*

20 *i*

*मैं* = 1

###### 200

= 20

= 10

262 गणित

माध्य से विचलन के संबंधित निरपेक्ष मान, अर्थात, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

20

1. − *एक्स*

हैं

इसलिए

∑ *एक्स मैं* − *एक्स*

*मैं* = 1

= 124

124

और एम.डी ( ) =

20 = 6.2

उदाहरण 3 खोजो अर्थ विचलन के बारे में MEDIAN के लिए अगले डेटा: 3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21.

समाधान यहाँ संख्या का टिप्पणियों है 11 कौन है विषम। व्यवस्था डेटा में आरोही आदेश देना, हम पास होना 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21

अब माध्यिका =

 11 +

2 \_

1  टी एच





या 6 वीं अवलोकन = 9

निरपेक्ष मान का संबंधित विचलन से माध्यिका, अर्थात, 6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

11

1. − एम

हैं

इसलिए

∑ *एक्स मैं*

*मैं* = 1

एम = 58

और

एम । डी । ( एम ) = 1 ∑ 11 *एक्स* − एम = 1 × 58 = 5 . 27

*i*

11 *मैं* = 1  11

* + 1. *अर्थ विचलन के लिए वर्गीकृत किया डेटा* हम जानना वह डेटा कर सकना होना वर्गीकृत किया में दो तौर तरीकों :
       1. अलग आवृत्ति वितरण,
       2. निरंतर आवृत्ति वितरण।

होने देना हम चर्चा करना तरीका का खोज अर्थ विचलन के लिए दोनों प्रकार का डेटा।

1. अलग आवृत्ति वितरण होने देना दिया गया डेटा निहित होना का *एन* विशिष्ट मान

*एक्स* 1 , *एक्स* 2 , ..., *एक्स एन* घटनेवाला साथ आवृत्तियों *एफ* 1 , *च* 2 , ..., *एफ एन* क्रमश। यह डेटा कर सकना होना

का प्रतिनिधित्व किया में तालिका का रूप जैसा दिया गया नीचे, और है बुलाया *अलग आवृत्ति वितरण* :

*एक्स* : *एक्स* 1 *एक्स* 2 *एक्स* 3 ... *एक्स एन*

*एफ* : *एफ* 1 *एफ* 2 *एफ* 3 ... *एफ एन*

सांख्यिकी 263

1. अर्थ माध्य के बारे में विचलन

पहला का सभी हम खोजो अर्थ *x* का दिया गया डेटा द्वारा का उपयोग करते हुए FORMULA

∑ *एक्स मैं च मैं*

*n*

1

= *मैं* = 1 =

*n*

*n*

∑ *एक्स मैं मैं \_*

∑ *मैं \_*

*मैं* = 1

एन *मैं* = 1 ,

*n*

कहाँ ∑ *एक्स मैं मैं \_*

*मैं* = 1

अर्थ है जोड़ का उत्पादों का टिप्पणियों *एक्स* मैं साथ उनका संबंधित

आवृत्तियों *च* मैं और

*n*

एन = ∑ *च मैं मैं* = 1

है जोड़ का आवृत्तियाँ।

तब, हम खोजो विचलन का टिप्पणियों *एक्स मैं* से मतलब और लेना उनका

निरपेक्ष मूल्य, अर्थात, *एक्स मैं* − *एक्स* के लिए सभी *मैं* =1, 2,... *, एन* ।

बाद यह, खोजो अर्थ का निरपेक्ष मान का विचलन, कौन है आवश्यक अर्थ विचलन के बारे में अर्थ। इस प्रकार

*n*

∑ *च मैं एक्स मैं* − *एक्स*  1 *एन*

#### एमडी ( *एक्स* ) =

*मैं* = 1

*n*

∑ *एफ मैं मैं* = 1

=  ∑ *च मैं एक्स मैं* − *एक्स*

*मैं* = 1

N

1. माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए, हम पाते हैं MEDIAN का दिया गया अलग आवृत्ति वितरण। के लिए यह टिप्पणियों हैं व्यवस्था की में आरोही आदेश देना। बाद यह संचयी आवृत्तियों हैं प्राप्त किया। तब, हम पहचान करना

एन

अवलोकन किसका संचयी आवृत्ति है बराबर को या अभी ग्रेटर बजाय

, कहाँ

2

एन है जोड़ का आवृत्तियाँ। यह कीमत का अवलोकन झूठ में मध्य का डेटा, इसलिए, यह आवश्यक माध्यिका है। माध्यिका ज्ञात करने के बाद, हमें माध्य प्राप्त होता है निरपेक्ष मान का विचलन से माध्यिका। इस प्रकार,

###### एमडी(एम) = 1

एन

*n*

∑ *च मैं*

*मैं* = 1

*एक्स मैं* − एम

उदाहरण 4 माध्य खोजें के बारे में विचलन के लिए मतलब निम्नलिखित डेटा :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | 2 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| *एफ मैं* | 2 | 8 | 10 | 7 | 8 | 5 |

264 गणित

समाधान होने देना हम बनाना ए मेज़ 13.1 का दिया गया डेटा और संलग्न अन्य कॉलम बाद गणना.

मेज़ 13.1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | *एफ मैं* | *एफ आई एक्स आई* | *मैं \_* − *एक्स* | *च* मैं *मैं \_* − *एक्स* |
| 2 | 2 | 4 | 5.5 | 11 |
| 5 | 8 | 40 | 2.5 | 20 |
| 6 | 10 | 60 | 1.5 | 15 |
| 8 | 7 | 56 | 0.5 | 3.5 |
| 10 | 8 | 80 | 2.5 | 20 |
| 12 | 5 | 60 | 4.5 | 22.5 |
|  | 40 | 300 |  | 92 |

6

एन = ∑ *च मैं*

*मैं* = 1

= 40 ,

6

∑ *च मैं एक्स मैं* = 300 ,

*मैं* = 1

6

∑ *च मैं एक्स मैं* − *एक्स* = 92

*मैं* = 1

इसलिए

*एक्स* = 1 6

एन *मैं* = 1

∑

*च मैं एक्स मैं*

= 1 × 300 = 7.5

40

और

एम। डी। ( *एक्स* ) = 1

एन

6

∑ *च मैं*

*मैं* = 1

*एक्स मैं* − *एक्स*

= 1

40

× 92

= 2.3

उदाहरण 5 खोजें अर्थ विचलन के बारे में MEDIAN के लिए अगले डेटा:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | 3 | 6 | 9 | 12 | 13 | 15 | 21 | 22 |
| *एफ मैं* | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 |

समाधान दिया गया टिप्पणियों हैं पहले से में आरोही आदेश देना। जोड़ा जा रहा है ए पंक्ति संगत को संचयी आवृत्तियों को दिया गया डेटा, हम पाना (मेज़ 13.2).

मेज़ 13.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | 3 | 6 | 9 | 12 | 13 | 15 | 21 | 22 |
| *एफ मैं* | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 |
| *सीएफ़* | 3 | 7 | 12 | 14 | 18 | 23 | 27 | 30 |

अब, एन=30 कौन है यहां तक की।

सांख्यिकी 265

मंझला है अर्थ का 15 वां और 16 वां अवलोकन. दोनों का इन टिप्पणियों झूठ में संचयी आवृत्ति 18, के लिए कौन संगत अवलोकन है 13.

इसलिए, मंझला एम

15 वां

अवलोकन + 16 वां अवलोकन 13 +13 \_

== \_ 13

2 2

अब, निरपेक्ष मान का विचलन से माध्यिका, अर्थात, मेज़ 13.3.

*एक्स मैं* − एम

हैं दिखाया में

मेज़ 13.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* − M | 10 | 7 | 4 | 1 | 0 | 2 | 8 | 9 |
| *f* i | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 |
| *f*i *xi* − M | 30 | 28 | 20 | 2 | 0 | 10 | 32 | 27 |

हम पास होना

8 8

∑ *च मैं* = 30 और ∑ *च मैं एक्स मैं* − एम = 149

इसलिए

*मैं* = 1 *मैं* = 1

एम। डी। (एम) = 1 ∑ *एफ एक्स* − एम

8

*मैं मैं*

N

*मैं* = 1

= 1 × 149 = 4.97.

30

1. निरंतर आवृत्ति वितरण ए निरंतर आवृत्ति वितरण है ए शृंखला जिसमें डेटा को बिना अंतराल के अलग-अलग वर्ग-अंतराल में वर्गीकृत किया जाता है उनका संबंधित आवृत्तियाँ।

उदाहरण के लिए, 100 छात्रों द्वारा प्राप्त अंक निरंतर प्रस्तुत किए जाते हैं आवृत्ति वितरण जैसा इस प्रकार :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| निशान प्राप्त किया | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| संख्या का छात्र | 12 | 18 | 27 | 20 | 17 | 6 |

1. अर्थ विचलन के बारे में अर्थ जबकि की गणना अर्थ का ए निरंतर आवृत्ति वितरण, हम था बनाया मान्यता वह आवृत्ति में प्रत्येक कक्षा है केंद्रित पर इसका मध्य बिंदु. यहाँ भी, हम लिखना मध्य-बिंदु का प्रत्येक दिया गया कक्षा और आगे बढ़ना आगे जैसा के लिए ए अलग आवृत्ति वितरण को खोजो अर्थ विचलन।

होने देना हम लेना अगले उदाहरण।

266 गणित

उदाहरण 6 खोजें अर्थ विचलन के बारे में अर्थ के लिए अगले डेटा।

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| निशान प्राप्त किया | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
| संख्या का छात्र | 2 | 3 | 8 | 14 | 8 | 3 | 2 |

समाधान हम बनाना अगले मेज़ 13.4 से दिया गया डेटा :

मेज़ 13.4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| निशान प्राप्त किया | की संख्या छात्र  *एफ मैं* | मध्य अंक  *एक्स मैं* | *एफ आई एक्स आई* | *मैं \_* − *एक्स* | *च* मैं *मैं \_* − *एक्स* |
| 10-20 | 2 | 15 | 30 | 30 | 60 |
| 20-30 | 3 | 25 | 75 | 20 | 60 |
| 30-40 | 8 | 35 | 280 | 10 | 80 |
| 40-50 | 14 | 45 | 630 | 0 | 0 |
| 50-60 | 8 | 55 | 440 | 10 | 80 |
| 60-70 | 3 | 65 | 195 | 20 | 60 |
| 70-80 | 2 | 75 | 150 | 30 | 60 |
|  | 40 |  | 1800 |  | 400 |

7 7 7

यहाँ

एन = ∑ *च मैं*

*मैं* = 1

= 40 ∑ *च मैं एक्स मैं*

*मैं* = 1

= 1800

∑ *च मैं एक्स मैं* − *एक्स*

*मैं* = 1

= 400

इसलिए

*एक्स*  1 7

एन *मैं* = 1

∑

*च मैं एक्स मैं*

= 1800 = 45

40

और

एमडी ( *एक्स* )

1 7 *एफ*

एन *मैं* = 1

∑

*i*

*एक्स मैं* − *एक्स*

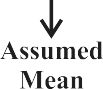
= 1 × 400 = 10

40

छोटा रास्ता तरीका माध्य विचलन की गणना के लिए अर्थ हम कर सकना टालना थकाऊ गणना का कम्प्यूटिंग द्वारा अगले चरण-विचलन तरीका। याद करना वह इस में तरीका, हम लेना एक ग्रहण अर्थ कौन है में मध्य या अभी बंद करना को यह में डेटा। तब विचलन का टिप्पणियों (या मध्य अंक का कक्षाएं) हैं लिया से

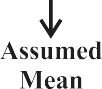
सांख्यिकी 267

ग्रहण अर्थ। यह है कुछ नहीं लेकिन स्थानांतरण का मूल से शून्य को ग्रहण अर्थ पर संख्या रेखा, जैसा दिखाया में अंजीर 13.3



अंजीर 13.3

अगर वहाँ है ए सामान्य कारक का सभी विचलन, हम विभाजित करना उन्हें द्वारा यह सामान्य विचलनों को और सरल बनाने का कारक। इन्हें चरण-विचलन के रूप में जाना जाता है। प्रक्रिया का ले रहा चरण-विचलन है परिवर्तन का पैमाना पर संख्या रेखा जैसा दिखाया में अंजीर 13.4



अंजीर 13.4

विचलन और चरण-विचलन कम करना आकार का अवलोकन, इसलिए वह संगणना अर्थात. गुणन, वगैरह।, बनना सरल. होने देना, नया चर होना लक्षित

द्वारा *डी* = *एक्स मैं*  *ए* , कहाँ ' *ए* ' है ग्रहण अर्थ और *एच* है सामान्य कारक। तब,

*मैं*  *एच*

अर्थ *एक्स* द्वारा चरण-विचलन तरीका है दिया गया द्वारा

*एन*

∑ *च मैं डी मैं*

*ए* + *मैं* = 1 × *एच*

एन

होने देना हम लेना डेटा का उदाहरण 6 और खोजो अर्थ विचलन द्वारा का उपयोग करते हुए कदम- विचलन तरीका।

268 गणित

लेना ग्रहण अर्थ *ए* = 45 और *एच* = 10, और रूप अगले मेज़ 13.5.

मेज़ 13.5

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| निशान प्राप्त किया | की संख्या छात्र | मध्य अंक | *डी* = *एक्स मैं*  45  *मैं*  10 | *एफ आई डी आई* | *एक्स मैं* − *एक्स* | *एफ एक्स* − *एक्स*  मैं *मैं* |
|  | *एफ मैं* | *एक्स मैं* |  |  |  |  |
| 10-20 | 2 | 15 | – 3 | – 6 | 30 | 60 |
| 20-30 | 3 | 25 | – 2 | – 6 | 20 | 60 |
| 30-40 | 8 | 35 | – 1 | – 8 | 10 | 80 |
| 40-50 | 14 | 45 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50-60 | 8 | 55 | 1 | 8 | 10 | 80 |
| 60-70 | 3 | 65 | 2 | 6 | 20 | 60 |
| 70-80 | 2 | 75 | 3 | 6 | 30 | 60 |
|  | 40 |  |  | 0 |  | 400 |

7

∑ *च मैं का \_*

इसलिए

*ए* + *मैं* = 1 × *एच*

एन

= 45 +

0 × 10 = 45

40

और

एमडी

( *एक्स* ) = 1

एन

7

∑ *च मैं एक्स मैं*

*मैं* = 1

* *एक्स* =

400

40

= 10

�Note The step deviation method is applied to compute . Rest of the procedure

is same.

1. माध्य विचलन के बारे में माध्यिका के बारे में माध्य विचलन ज्ञात करने की प्रक्रिया MEDIAN के लिए ए निरंतर आवृत्ति वितरण है समान जैसा हम किया के लिए अर्थ विचलन माध्य के बारे में. एकमात्र अंतर माध्य को माध्यिका द्वारा प्रतिस्थापित करने में है जबकि ले रहा विचलन.

होने देना हम याद करना प्रक्रिया का खोज MEDIAN के लिए ए निरंतर आवृत्ति वितरण। डेटा है पहला व्यवस्था की में आरोही आदेश देना। तब, MEDIAN का निरंतर आवृत्ति वितरण है प्राप्त किया द्वारा पहला की पहचान कक्षा में कौन MEDIAN झूठ

(माध्यिका कक्षा) और तब आवेदन FORMULA

सांख्यिकी 269

एन − सी

माध्यिका *एल* + 2 × *एच*

*एफ*

कहाँ MEDIAN कक्षा है कक्षा मध्यान्तर किसका संचयी आवृत्ति है अभी ग्रेटर

एन

बजाय या बराबर को 2 , एन है जोड़ का आवृत्तियाँ, *मैं* , *एफ* , *एच* और सी हैं, क्रमश: निचला

आप LIMIT , आवृत्ति, चौड़ाई का MEDIAN कक्षा और सी संचयी आवृत्ति का कक्षा अभी के पिछले MEDIAN कक्षा। बाद खोज माध्यिका, निरपेक्ष मान

का विचलन का मध्य-बिंदु *एक्स मैं* का प्रत्येक कक्षा से MEDIAN अर्थात,

*एक्स मैं* − एम

हैं प्राप्त किया।

तब

एमडी (एम) = 1

एन

*एन*

∑ *एफ एक्स*  − एम

*i*

*i*

*मैं* = 1

प्रक्रिया है इलस्ट्रेटेड में अगले उदाहरण:

उदाहरण 7 इसे परिकलित करें अर्थ के बारे में विचलन MEDIAN के लिए निम्नलिखित डेटा :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| कक्षा | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| आवृत्ति | 6 | 7 | 15 | 16 | 4 | 2 |

समाधान रूप अगले मेज़ 13.6 से दिया गया डेटा :

मेज़ 13.6

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| कक्षा | आवृत्ति | संचयी आवृत्ति | मध्य अंक | *एक्स मैं* − मेड. | *एफ एक्स* − मेड.  *मैं मैं* |
|  | *एफ मैं* | ( *सीएफ* ) | *एक्स मैं* |  |  |
| 0-10 | 6 | 6 | 5 | 23 | 138 |
| 10-20 | 7 | 13 | 15 | 13 | 91 |
| 20-30 | 15 | 28 | 25 | 3 | 45 |
| 30-40 | 16 | 44 | 35 | 7 | 112 |
| 40-50 | 4 | 48 | 45 | 17 | 68 |
| 50-60 | 2 | 50 | 55 | 27 | 54 |
|  | 50 |  |  |  | 508 |

270 गणित

कक्षा मध्यान्तर युक्त कक्षा। हम जानना वह

एन वां

2

या 25 वां वस्तु है 20-30. इसलिए, 20-30 है MEDIAN

एन − सी

मंझला = *एल*

2 × *एच एफ*

यहाँ *एल* = 20, सी = 13, *एफ* = 15, *एच* = 10 और एन = 50

इसलिए, माध्यिका

20 + 25 13 × 10 = 20 + 8 = 28

15

इस प्रकार, अर्थ विचलन के बारे में MEDIAN है दिया गया द्वारा

N

1 6 *एफ*

*एक्स* − एम

1 × 508

एमडी (एम) =

∑ *मैं मैं*

*मैं* = 1

= 50

= 10.16

EXERCISE 13.1

खोजो के बारे में माध्य विचलन डेटा के लिए मतलब अभ्यास 1 और 2 में.

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

खोजो अर्थ विचलन के बारे में MEDIAN के लिए डेटा में अभ्यास 3 और 4.

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

खोजो के बारे में माध्य विचलन डेटा के लिए मतलब अभ्यास 5 और 6 में।

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 5. *एक्स मैं* 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| *एफ मैं* 7 | 4 | 6 | 3 | 5 |
| 6. *एक्स मैं* 10 | 30 | 50 | 70 | 90 |
| *एफ मैं* 4 | 24 | 28 | 16 | 8 |

खोजो अर्थ विचलन के बारे में MEDIAN के लिए डेटा में अभ्यास 7 और 8.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7. *एक्स मैं* 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 15 |
| *एफ मैं* 8 | 6 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 8. *एक्स मैं* 15 | 21 | 27 | 30 | 35 |  |
| *एफ मैं* 3 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |

सांख्यिकी 271

खोजो मतलब विचलन के बारे में के लिए मतलब आंकड़ा में अभ्यास 9 और 10.

9.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Income per day in ` | 0-100 | | 100-200 | | 200-300 | 300-400 | | 400-500 | | 500-600 | | 600-700 | | 700-800 |
| Number of persons | 4 | | 8 | | 9 | 10 | | 7 | | 5 | | 4 | | 3 |
| Height in cms | | 95-105 | | 105-115 | | | 115-125 | | 125-135 | | 135-145 | | 145-155 | |
| Number of  boys | | 9 | | 13 | | | 26 | | 30 | | 12 | | 10 | |

10.

1. खोजो अर्थ विचलन के बारे में MEDIAN के लिए अगले डेटा :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| निशान | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| की संख्या लड़कियाँ | 6 | 8 | 14 | 16 | 4 | 2 |

1. गणना अर्थ विचलन के बारे में MEDIAN आयु के लिए आयु वितरण का 100 व्यक्तियों दिया गया नीचे:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| आयु  (में साल) | 16-20 | 21-25 | 26-30 | 31-35 | 36-40 | 41-45 | 46-50 | 51-55 |
| संख्या | 5 | 6 | 12 | 14 | 26 | 12 | 16 | 9 |

[ संकेत देना बदलना दिया गया डेटा में निरंतर आवृत्ति वितरण द्वारा घटाने 0.5 से निचला आप LIMIT और जोड़ना 0.5 को अपर आप LIMIT का प्रत्येक कक्षा मध्यान्तर]

* + 1. *माध्य विचलन की सीमाएँ* एक श्रृंखला में, जहां परिवर्तनशीलता की डिग्री है बहुत उच्च, MEDIAN है नहीं ए प्रतिनिधि केंद्रीय प्रवृत्ति। इस प्रकार, अर्थ के बारे में विचलन MEDIAN गणना के लिए ऐसा शृंखला कर सकना नहीं होना पूरी तरह भरोसा किया.

जोड़ का विचलन से अर्थ (शून्य से) लक्षण अवहेलना करना) है अधिक बजाय जोड़ का विचलन से मध्यिका. इसलिए, अर्थ विचलन के बारे में अर्थ है नहीं बहुत वैज्ञानिक। इस प्रकार, में अनेक मामले, अर्थ विचलन मई देना असंतोषजनक परिणाम। भी अर्थ विचलन है गणना पर आधार का निरपेक्ष मान का विचलन और इसलिए, नही सकता होना अधीन को आगे बीजगणितीय इलाज। यह तात्पर्य वह हम अवश्य पास होना कुछ अन्य उपाय का फैलाव. मानक विचलन है ऐसा ए उपाय का फैलाव.

#### झगड़ा और मानक विचलन

याद करना वह जबकि की गणना अर्थ विचलन के बारे में अर्थ या माध्यिका, निरपेक्ष विचलनों का मान लिया गया। को अर्थ देने के लिए निरपेक्ष मूल्यों का सहारा लिया गया अर्थ विचलन, अन्यथा विचलन मई रद्द करना के बीच खुद।

एक और रास्ता को पर काबू पाने यह कठिनाई कौन पड़ी देय को लक्षण का विचलन, है को लेना चौकों का सभी विचलन. ज़ाहिर तौर से सभी इन चौकों का विचलन हैं

272 गणित

गैर-नकारात्मक. होने देना *एक्स* 1 , *एक्स* 2 , *एक्स* 3 , ..., *एक्स एन* होना *एन* टिप्पणियों और हो उनका अर्थ। तब

*एन*

###### ( − *x* ) 2 + ( *एक्स* − *एक्स* ) 2 + ....... + ( *एक्स* − *x* ) 2 = ( *एक्स* − *x* ) 2

1 2 *एन*  *मैं*  .

*मैं* = 1

अगर यह जोड़ है शून्य, तब प्रत्येक ( *एक्स मैं* − *एक्स* ) है को होना शून्य। यह तात्पर्य वह वहाँ है नहीं फैलाव पर सभी जैसा सभी टिप्पणियों हैं बराबर को अर्थ ।

*एन*

अगर ∑ ( *एक्स* − *एक्स* ) 2 है छोटा , यह दर्शाता है वह टिप्पणियों *एक्स* , *एक्स* , *एक्स* ,... *,एक्स* हैं

*मैं*

*मैं* = 1

1 2 3 एन

बंद करना को मतलब और इसलिए, वहाँ है ए निचला डिग्री का फैलाव. पर इसके विपरीत, अगर यह जोड़ है बड़ा, वहाँ है ए उच्च डिग्री का फैलाव का टिप्पणियों

*एन*

से अर्थ । कर सकना हम \_ इस प्रकार कहना \_ वह जोड़ \_ ∑ ( *एक्स आई*

– *एक्स* ) 2

है ए उचित सूचक

का डिग्री का फैलाव या बिखराव?

*मैं* = 1

होने देना हम लेना तय करना ए का छह टिप्पणियों 5, 15, 25, 35, 45, 55. द अर्थ का टिप्पणियों है = 30. जोड़ का चौकों का विचलन के लिए से यह तय करना है

6

∑ ( *एक्स मैं*

*मैं* = 1

– *एक्स* ) 2 = (5-30) 2 + (15-30 ) 2+ (25-30) 2 + (35-30) 2 + (45-30) 2 +(55-30) 2

= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750

होने देना हम अब लेना एक और तय करना बी का 31 टिप्पणियों 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23,

24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

अर्थ इन टिप्पणियों में से है *य* = 30

टिप्पणी वह दोनों सेट ए और बी का टिप्पणियों पास होना ए अर्थ का 30.

अब, जोड़ का चौकों का विचलन का टिप्पणियों के लिए तय करना बी से अर्थ *य* है दिया गया द्वारा

31

∑ ( *यी \_*

*मैं* = 1

– *य* ) 2

= (15-30) 2 +(16-30) 2 + (17-30) 2 + ...+ (44-30) 2 +(45-30) 2

= (-15) 2 +(-14) 2 + ...+ (-1) 2 + 0 2 + 1 2 + 2 2 + 3 2 + ...+ 14 2 + 15 2

= 2 [15 2 + 14 2 + ... + 1 2 ]

#### = 2 × 15 × (15 + 1) (30 + 1)

6

= 5 × 16 × 31 = 2480

*एन* ( *एन* + 1) (2 *एन* + 1)

(क्योंकि जोड़ का चौकों का पहला *n* प्राकृतिक नंबर =

6 . यहाँ *एन* = 15)

सांख्यिकी 273

अगर ∑ ( *एक्स आई*

*n*

– *एक्स* ) 2

है केवल हमारा उपाय का फैलाव या बिखराव के बारे में अर्थ, हम

*मैं* = 1

इच्छा झुकाव होना को कहना वह तय करना ए का छह टिप्पणियों है ए कमतर फैलाव के बारे में अर्थ 31 अवलोकनों के सेट बी की तुलना में, भले ही सेट ए में अवलोकन अधिक हों बिखरा हुआ से अर्थ (द श्रेणी का विचलन प्राणी से -25 को 25) बजाय में तय करना बी (कहाँ श्रेणी का विचलन है से -15 को 15).

यह है भी स्पष्ट से अगले आरेख.

के लिए तय करना ए, हम पास होना





अंजीर 13.5

के लिए तय करना बी, हम पास होना







अंजीर 13.6

इस प्रकार, हम कर सकना कहना वह जोड़ का चौकों का विचलन से अर्थ है नहीं ए उचित उपाय का फैलाव. को पर काबू पाने यह कठिनाई हम लेना अर्थ का चौकों का

1 *एन* ( *एक्स*

– *एक्स* ) 2

विचलन, अर्थात, हम लेना

*n*

∑ *मैं*

*मैं* = 1

. में मामला का तय करना ए, हम पास होना

अर्थ =

11 \_

× 1750 = 291.67 और में मामला का तय करना बी, यह × है 2480 = 80.

6 31

यह दर्शाता है वह बिखराव या फैलाव है अधिक में तय करना ए बजाय बिखराव या फैलाव में तय करना बी, जो से पुष्टि करता है ज्यामितीय का प्रतिनिधित्व दो सेट.

1 ∑ ( *एक्स* − *एक्स* ) 2

इस प्रकार, हम कर सकना लेना

*एन*  *मैं*  के रूप में ए मात्रा कौन नेतृत्व को ए उचित उपाय

का फैलाव. यह संख्या, अर्थात, अर्थ का चौकों का विचलन से अर्थ है

बुलाया *झगड़ा* और है लक्षित द्वारा *σ* 2

(पढ़ना जैसा सिग्मा वर्ग)। इसलिए,

झगड़ा का *एन* टिप्पणियों *एक्स* 1 , *एक्स* 2 ,..., *एक्स एन* है दिया गया द्वारा

274 गणित

*σ* 2 = 1 *एन*

∑

*एन मैं* = 1

( *एक्स मैं*

– *एक्स* ) 2

* + 1. *मानक विचलन* विचरण की गणना में, हम पाते हैं कि की इकाइयाँ व्यक्ति टिप्पणियों *एक्स* मैं और इकाई का उनका अर्थ हैं अलग से वह का विचरण, तब से झगड़ा शामिल जोड़ का चौकों का ( *एक्स* मैं - *एक्स* ). के लिए यह कारण, उचित

उपाय का फैलाव के बारे में अर्थ का ए तय करना का टिप्पणियों है व्यक्त जैसा सकारात्मक

विचरण का वर्गमूल और इसे *मानक विचलन कहा जाता है* । इसलिए, मानक विचलन, आम तौर पर लक्षित द्वारा , है दिया गया द्वारा

*σ* =

1

*n*

∑ *i*

*n*

(*x* − *x*)

2

*i*=1

... (1)

आइए विचरण की गणना को स्पष्ट करने के लिए निम्नलिखित उदाहरण लें इस तरह, मानक विचलन का असमूहीकृत डेटा।

उदाहरण 8 खोजो झगड़ा का अगले डेटा:

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

समाधान दिए गए डेटा से हम निम्नलिखित तालिका 13.7 बना सकते हैं। मतलब है 14 को कल्पित माध्य मानकर चरण-विचलन विधि द्वारा गणना की गई। की संख्या टिप्पणियों है *एन* = 10

मेज़ 13.7

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | *डी* = *एक्स मैं*  14  *मैं*  2 | विचलन से अर्थ ( *एक्स मैं* - ) | ( *एक्स मैं* - ) |
| 6 | -4 | -9 | 81 |
| 8 | -3 | -7 | 49 |
| 10 | -2 | -5 | 25 |
| 12 | -1 | -3 | 9 |
| 14 | 0 | -1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 |
| 18 | 2 | 3 | 9 |
| 20 | 3 | 5 | 25 |
| 22 | 4 | 7 | 49 |
| 24 | 5 | 9 | 81 |
|  | 5 |  | 330 |

सांख्यिकी 275

*n*

∑ *का \_*

अत: माध्य = ग्रहण अर्थ + *मैं* = 1 × *एच* =

*एन*

14+ \_

5 × 2 = 15

10

10 2 1

और विचरण ( *σ* 2 ) =

1

इस प्रकार मानक विचलन ( ) =

∑ *( एक्स मैं* − *एक्स* )

*मैं* = 1

*n*

= 5 74



33

= 10

× 330 = 33

* + 1. *मानक विचलन का ए अलग आवृत्ति वितरण* होने देना दिया गया अलग आवृत्ति वितरण होना

*एक्स* : *x* 1 , *एक्स* 2 , *एक्स* 3 ,. . . , *एक्स एन*

*एफ* : *एफ1* , *एफ2* , *एफ3* \_ \_ \_ ,. . . , *एफ एन*

N

1 ∑

*n*

*f* (*x* − *x* )2

*i i*

*i*=1

में यह मामला मानक विचलन ( *σ* ) =

... (2)

कहाँ

*n*

एन = ∑ *च मैं* .

*मैं* = 1

होने देना हम लेना ऊपर अगले उदाहरण।

उदाहरण 9 निम्नलिखित डेटा के लिए विचरण और मानक विचलन ज्ञात करें:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | 4 | 8 | 11 | 17 | 20 | 24 | 32 |
| *एफ मैं* | 3 | 5 | 9 | 5 | 4 | 3 | 1 |

समाधान पेश है डेटा में तालिका का रूप (मेज़ 13.8), हम पाना

मेज़ 13.8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | *एफ मैं* | *च मैं एक्स मैं* | *एक्स मैं* – | ( *एक्स मैं* − *एक्स* )  2 | *च मैं* ( *एक्स मैं* − *एक्स* )  2 |
| 4 | 3 | बारहवें | -दस | 100 | 300 |
| 8 | 5 | 40 | -6 | 36 | 180 |
| 11 | 9 | 99 | -3 | 9 | 81 |
| 17 | 5 | 85 | 3 | 9 | 45 |
| 20 | 4 | 80 | 6 | 36 | 144 |
| 24 | 3 | 72 | 10 | 100 | 300 |
| 32 | 1 | 32 | 18 | 324 | 324 |
|  | 30 | 420 |  |  | 1374 |

276 गणित

∑ *एफ* *एक्स* = 42 0 , ∑ *एफ* ( *एक्स* − *एक्स* ) 2 = 1374

एन = 30,

7

7

*मैं मैं*  *मैं*  *मैं*

*मैं* = 1 *मैं* = 1

इसलिए

7

∑ *च मैं एक्स मैं*  1

*एक्स*  *मैं* = 1  = × 420 = 14

एन 30

7

1

2

इसलिए भिन्नता (

2 ) = एन

1

∑ *च मैं* ( *एक्स मैं* − *एक्स* )

*मैं* = 1

= 30 × 1374 = 45.8

और मानक विचलन ( *σ* ) =

45.8

= 6.77

* + 1. *मानक विचलन का ए निरंतर आवृत्ति वितरण*  दिया गया निरंतर आवृत्ति वितरण कर सकना होना का प्रतिनिधित्व किया जैसा ए अलग आवृत्ति वितरण द्वारा की जगह प्रत्येक कक्षा द्वारा इसका मध्य बिंदु. तब, मानक विचलन है गणना द्वारा तकनीक अपनाया में मामला का ए अलग आवृत्ति वितरण।

अगर वहाँ है ए आवृत्ति वितरण का *एन* कक्षाओं प्रत्येक कक्षा परिभाषित द्वारा इसका मध्य-बिंदु

*एक्स मैं* साथ आवृत्ति *च मैं* , मानक विचलन इच्छा होना प्राप्त किया द्वारा FORMULA

*σ* = ,

*n*

1

N

∑

*n*

*f* (*x* − *x* )2

*i* *i*

*i* =1

कहाँ है अर्थ का वितरण और एन = ∑ *च मैं* .

*मैं* = 1

एक और FORMULA के लिए मानक विचलन हम जानना वह

1 *एन*  1 *एन*  2 2

=

झगड़ा (

2 ) = एन

∑ *च मैं* ( *एक्स मैं* −

*मैं* = 1

*एक्स* ) 2

एन

∑ *मैं \_* ( *एक्स मैं* +

*मैं* = 1

*एक्स* - 2x *\_ एक्स मैं* )

1 \_ *एन*  2 *एन*  2 *एन*  

= एन ∑ *एफ मैं एक्स मैं* +

∑ *एक्स मैं \_* -

∑ 2x *\_ मैं \_ एक्स मैं* 

 *मैं* = 1

1 \_ *एन*

*मैं* = 1

2 2

*मैं* = 1 \_

*एन*  *एन*  

= एन ∑ *एफ मैं एक्स मैं* +

*एक्स* ∑ *च मैं* −

2x *\_* ∑ *एक्स मैं च मैं* 

 *मैं* = 1

*मैं* = 1

*मैं* = 1 \_

सांख्यिकी 277

1 *एन*   1 *एन*  *एन*  

= *एफ एक्स* 2 + *एक्स* 2 एन − 2 *एक्स* . एन *एक्स*

यहाँ

∑ *मैं च मैं* = *एक्स* या ∑ *एक्स मैं च मैं* = एन *एक्स* 

*मैं मैं*

N

*मैं* = 1

1 *एन*

 एन *मैं* = 1

1 *एन*  2

*i i*

*मैं* = 1 

2

= ∑

एन *मैं* = 1

*एफ एक्स* 2 + *एक्स* 2

– 2 *एक्स* 2 =

एन

∑ *मैं \_ एक्स मैं* - *एक्स*

*मैं* = 1

 *एन*   2

1 *एन*

 ∑ *च मैं एक्स मैं* 

1  *एन*

 *एन*   2 

या 2 =

∑ *एफ एक्स* 2 −  *मैं* =1  =

एन ∑ *एफ एक्स* 2 − ∑ *एफ एक्स*  

एन *मैं मैं*   एन  एन 2

*मैं मैं को*  *को*  

*मैं* − 1  

 

 *मैं* = 1

 *मैं* = 1 

इस प्रकार, मानक विचलन ( *σ* ) =

1

N

*n*

N *f x* − *f x*

∑

2

 *n*

∑

2

*i* =1

*i i*  *i i* 





*i* =1

... (3)

उदाहरण 10 गणना अर्थ, झगड़ा और मानक विचलन के लिए अगले वितरण :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| कक्षा | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
| आवृत्ति | 3 | 7 | 12 | 15 | 8 | 3 | 2 |

समाधान से दिया गया डेटा, हम CONSTRUCT अगले मेज़ 13.9.

मेज़ 13.9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| कक्षा | आवृत्ति ( *च मैं* ) | मध्य-बिंदु ( *एक्स मैं* ) | *एफ आई एक्स आई* | ( *एक्स* – ) 2  *मैं* | *एफ* ( *एक्स* – ) 2  *मैं मैं* |
| 30-40 | 3 | 35 | 105 | 729 | 2187 |
| 40-50 | 7 | 45 | 315 | 289 | 2023 |
| 50-60 | 12 | 55 | 660 | 49 | 588 |
| 60-70 | 15 | 65 | 975 | 9 | 135 |
| 70-80 | 8 | 75 | 600 | 169 | 1352 |
| 80-90 | 3 | 85 | 255 | 529 | 1587 |
| 90-100 | 2 | 95 | 190 | 1089 | 2178 |
|  | 50 |  | 3100 |  | 10050 |

278 गणित

इस प्रकार मतलब

*एक्स* = 1 एन

7

# ∑

*मैं* = 1

*च मैं एक्स मैं* =

3100

50

= 62

झगड़ा ( *σ* 2 ) = 1

N

7

∑ *मैं \_* ( *एक्स मैं* − *एक्स* ) 2

*मैं* = 1

= 1 × 10050 = 201

50

201

और मानक विचलन ( *σ* )

== \_ 14 18

उदाहरण 11 खोजो मानक विचलन के लिए अगले डेटा :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| *एफ मैं* | 7 | 10 | 15 | 10 | 6 |

समाधान होने देना हम रूप अगले मेज़ 13.10:

मेज़ 13.10

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | *एफ मैं* | *एफ आई एक्स आई* | *एक्स मैं*  2 | *एफ आई एक्स आई*  2 |
| 3 | 7 | इक्कीस | 9 | 63 |
| 8 | 10 | 80 | 64 | 640 |
| 13 | पंद्रह | 195 | 169 | 2535 |
| 18 | 10 | 180 | 324 | 3240 |
| 23 | 6 | 138 | 529 | 3174 |
|  | 48 | 614 |  | 9652 |

अब, द्वारा FORMULA (3), हम पास होना

1

N

N *f x* −

∑ *i i* ∑

2

(

*f x*

*i i*

)

2

*σ* =

1

=

48 × 9652 − (614)2

48

1

48

463296 − 376996

=

1

= 48

× 293 *.* 77

= 6.12

सांख्यिकी 279

इसलिए, मानक विचलन ( ) = 6.12

13.5.4. *विचरण और मानक विचलन ज्ञात करने की शॉर्टकट विधि* कभी-कभी *x* i का मान एक असतत वितरण या मध्य बिंदु *x* i में एक में विभिन्न वर्गों के निरंतर वितरण हैं बड़ा और इसलिए गणना का अर्थ और झगड़ा बन जाता है थकाऊ और समय उपभोग. द्वारा का उपयोग करते हुए चरण-विचलन तरीका, यह है संभव को आसान बनाने में प्रक्रिया।

#### 1

होने देना ग्रहण अर्थ होना 'ए' और पैमाना होना कम किया हुआ को *एच*

टाइम्स ( *एच* प्राणी

चौड़ाई का कक्षा-अंतराल)। होने देना चरण-विचलन या नया मान होना *यी* । *\_*

अर्थात

*य* = *एक्स मैं*  ए

*एच*

*i*

या *एक्स मैं* = ए + *हाय मैं*  ... (1)

हम जानते है कि

*n*

∑ *च मैं एक्स मैं*

*एक्स* = *मैं* = 1

एन

... (2)

की जगह *एक्स* मैं से (1) में (2), हम पाना

*n*

∑ *च मैं (* ए + *हाय मैं* )

*एक्स* = *मैं* = 1

एन

1  *एन*  *एन*

 1  *एन*  *एन*  

=  ∑ *च मैं* ए + ∑ *एच* *च मैं* *यी \_*  =

एन

एन  ए ∑ *च मैं* + *एच* ∑ *च मैं* *यी \_* 

 *मैं* = 1

*मैं* = 1

  *मैं* = 1

*मैं* = 1 

∑ *च मैं यी \_*

*n*

 *एन*  

= ए *.* एन + *एच मैं* = 1

क्योंकि \_ \_ ∑ *च मैं* = एन 

एन एन 

*मैं* = 1 

इस प्रकार *एक्स* = ए + *एच आप*  ... (3)

अब वैरिएंस का चर *एक्स* ,

*σ* 2 = 1 *एन*

∑

*x*

एन *मैं* = 1

*च मैं ( एक्स मैं*

– *एक्स* ) 2

पहला *एन*

∑

= एन *मैं* = 1

*च मैं* (ए + *हाय मैं*

* ए − *एच य* ) 2

(उपयोग करना (1) और (3))

280 गणित

1 ∑ *एन*

*एफ ज* 2 ( *य*

– *य* ) 2

*मैं*  *मैं*

*मैं* = 1

=

N

*ज* 2 *एन*  2

*i*

अर्थात

= ∑ *च मैं* ( *यी \_* − *य* )

*मैं* = 1

N

2 2 2

=

*h*

*x*  *y*

= *ज* 2 × झगड़ा का चर *य*

या *एक्स* = *एच य*

... (4)

से (3) और (4), हम पास होना

*h*

N

*n*

N *f y* − *f y*

∑ *i i*  ∑ *i i* 

2

 *n*

2

*i* =1

 *i*=1 

=

... (5)

*एक्स*

होने देना हम हल करना उदाहरण 11 द्वारा छोटा रास्ता तरीका और का उपयोग करते हुए FORMULA (5)

उदाहरण 12 गणना अर्थ, झगड़ा और मानक विचलन के लिए अगले वितरण।

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| कक्षाओं | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
| आवृत्ति | 3 | 7 | 12 | 15 | 8 | 3 | 2 |

समाधान होने देना ग्रहण अर्थ ए = 65. यहाँ *एच* = 10 हम प्राप्त अगले मेज़ 13.11 से दिया गया डेटा :

मेज़ 13.11

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| कक्षा | आवृत्ति | मध्य-बिंदु | *य* = *एक्स मैं*  65  *मैं*  10 | *य* 2  *मैं* | *च मैं यी \_* | *एफ य* 2  *मैं मैं* |
|  | *एफ मैं* | *एक्स मैं* |  |  |  |  |
| 30-40 | 3 | 35 | – 3 | 9 | – 9 | 27 |
| 40-50 | 7 | 45 | – 2 | 4 | – 14 | 28 |
| 50-60 | 12 | 55 | – 1 | 1 | – 12 | 12 |
| 60-70 | 15 | 65 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 70-80 | 8 | 75 | 1 | 1 | 8 | 8 |
| 80-90 | 3 | 85 | 2 | 4 | 6 | 12 |
| 9 0-100 | 2 | 95 | 3 | 9 | 6 | 18 |
|  | एन=50 |  |  |  | – 15 | 105 |

इसलिए *एक्स* =

ए + ∑ *च मैं यी \_* × *एच* = 65 − 15 × 10 = 62 50 50

सांख्यिकी 281

*ज* 2  2 2 

झगड़ा

*σ* 2 =

एन2 \_ N∑ \_ \_ *च मैं* *यी \_*

- ( ∑ *च मैं यी \_*

)  

( 10 ) 2  2 



= ( 50 ) 2 50 \_ × 105 − ( - 15) 

= 1 [5250 − 225] = 201

25

और मानक विचलन ( *σ* ) == \_ 14.18

201

EXERCISE 13.2

खोजो अर्थ और झगड़ा के लिए प्रत्येक का डेटा में व्यायाम 1 को 5.

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

1. पहला *एन* प्राकृतिक नंबर
2. पहला 10 गुणकों का 3

4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 6 | 10 | 14 | 18 | 24 | 28 | 30 |
| *f i* | 2 | 4 | 7 | 12 | 8 | 4 | 3 |

5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 92 | 93 | 97 | 98 | 102 | 104 | 109 |
| *f i* | 3 | 2 | 3 | 2 | 6 | 3 | 3 |

6. खोजो अर्थ और मानक विचलन का उपयोग करते हुए छोटा रास्ता तरीका।

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *एक्स मैं* | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 |
| *एफ मैं* | 2 | 1 | 12 | 29 | 25 | 12 | 10 | 4 | 5 |

खोजो अर्थ और झगड़ा के लिए अगले आवृत्ति वितरण में अभ्यास 7 और 8.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Classes | 0-30 | 30-60 | 60-90 | 90-120 | 120-150 | 150-180 | 180-210 |
| Frequencies | 2 | 3 | 5 | 10 | 3 | 5 | 2 |

7.

282 गणित

8.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Classes | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
| Frequencies | 5 | 8 | 15 | 16 | 6 |

1. खोजो अर्थ, झगड़ा और मानक विचलन का उपयोग करते हुए छोटा रास्ता तरीका

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ऊंचाई में मुख्यमंत्रियों | 70-75 | 75-80 | 80-85 | 85-90 | 90-95 | 95-100 | 100-105 | 105-110 | 110-115 |
| नहीं। का बच्चे | 3 | 4 | 7 | 7 | 15 | 9 | 6 | 6 | 3 |

1. व्यास का मंडलियां (में मिमी) अनिर्णित में ए डिज़ाइन हैं दिया गया नीचे:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| व्यास | 33-36 | 37-40 | 41-44 | 45-48 | 49-52 |
| नहीं। का मंडलियां | 15 | 17 | 21 | 22 | 25 |

गणना मानक विचलन और अर्थ का व्यास वृत्त.

[ संकेत देना पहला बनाना डेटा निरंतर द्वारा निर्माण कक्षाओं जैसा 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 और तब आगे बढ़ना।]

##### मिश्रित उदाहरण

उदाहरण 13 झगड़ा का 20 टिप्पणियों है 5. अगर प्रत्येक अवलोकन है गुणा किया हुआ द्वारा 2, खोजो नया झगड़ा का इस कारण हुई अवलोकन.

समाधान होने देना टिप्पणियों होना *एक्स* 1 , *एक्स* 2 , ..., *x* 20 और हो उनका अर्थ। दिया गया वह झगड़ा = 5 और *एन* = 20. हम जानना वह

20

∑

झगड़ा ( *σ* 2 ) = 1 ( − *एक्स* ) 2 , अर्थात, 5 =

*मैं*

20

( *मैं* − *एक्स* ) 2

∑

1

*एन मैं* = 1

20

20 *मैं* = 1

या ∑ ( *मैं* − *एक्स* ) 2 = 100

*मैं* = 1

अगर प्रत्येक अवलोकन है गुणा किया हुआ द्वारा 2, और नया इस कारण हुई टिप्पणियों हैं *यी* \_ , तब

*यी* \_ = 2 *एक्स* मैं

अर्थात। *मैं* \_ =

1

2 *मैं \_*

... (1)

*य* = 1 ∑ 2 0 *य*

= 1 ∑ 2 0 2x *\_*

2 1 ∑ 2 0 *एक्स*

सांख्यिकी 283

इसलिए

*i*

*एन मैं* = 1

20 *मैं* = 1

*मैं*

*मैं* = 1

20

###### 1

*i* =

यानी *वाई* = 2 या = 2 *य*

स्थानापन्न मान का *एक्स मैं* और में (1), हम पाना

20  1 1  2 20

∑  2 *मैं \_*

– 2 *य* 

= 100 , अर्थात। ∑ ( *मैं \_*

###### – *य* ) 2 = 400

*मैं* = 1  

इस प्रकार विचरण नए के टिप्पणियों =

*मैं* = 1

1 × 400 = 20 = 2 2 × 5

20

�Note The reader may note that if each observation is multiplied by a constant

*k*, the variance of the resulting observations becomes *k*2 times the original variance.

उदाहरण14 अर्थ का 5 टिप्पणियों है 4.4 और उनका झगड़ा है 8.24. अगर तीन का टिप्पणियों हैं 1, 2 और 6, खोजो अन्य दो अवलोकन.

समाधान होने देना अन्य दो टिप्पणियों होना *एक्स* और *य* . इसलिए, शृंखला है 1, 2, 6, *एक्स* , *वाई*

1 2 + 6 + + *य*

अब मतलब = 4.4 = 5

या 22 = 9 + *एक्स* + *य*

इसलिए *एक्स* + *य* = 13 ... (1)

1 5 ( *एक्स*

− *x* ) 2

भिन्नता भी = 8.24 =

*n*

∑ *मैं*

*मैं* = 1

अर्थात 8.24 =

1  ( 3 *.* 4 ) 2 + ( 2 *.* 4 ) 2 + ( 1 *.* 6 ) 2 + *एक्स* 2 + *य* 2 − 2 × 4 *.* 4 ( *एक्स* + *य* ) + 2 × ( 4 *.* 4 ) 2 

 

5

या 41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + *एक्स* 2 + *य* 2 -8.8 × 13 + 38.72

इसलिए *x* 2 + *य* 2 = 97 ... (2)

लेकिन से (1), हम पास होना

*एक्स* 2 + *य* 2 + 2 *xy* = 169 ... (3)

से (2) और (3), हम पास होना

2 *xy* = 72 ... (4)

घटाने (4) से (2), हम पाना

284 गणित

*एक्स* 2 + *य* 2 – 2 *xy* = 97 – 72 अर्थात ( *एक्स* – *य* ) 2 = 25

या *एक्स* – *य* = ± 5 ... (5)

इसलिए, 1 से) और (5), हम पाते हैं

*एक्स* = 9, *य* = 4 कब *एक्स – य* = 5 या *एक्स* = 4, *य* = 9 कब *एक्स – य* = – 5

इस प्रकार, शेष टिप्पणियों हैं 4 और 9.

उदाहरण 15 अगर प्रत्येक का अवलोकन *एक्स* 1 , *एक्स* 2 *, ...,एक्स एन* है बढ़ा हुआ द्वारा *'ए'* , कहाँ *ए* है ए नकारात्मक या सकारात्मक संख्या, दिखाओ वह झगड़ा अवशेष अपरिवर्तित.

समाधान होने देना *एक्स* होना अर्थ का *एक्स* 1 , *एक्स* 2 *, ...,एक्स एन* . तब झगड़ा है दिया गया द्वारा

*σ* 2 1 (

*n*

– *एक्स* ) 2

1 = ∑ *मैं*

*n*

*मैं* = 1

अगर *'ए* है जोड़ा को प्रत्येक अवलोकन, नया टिप्पणियों इच्छा होना

*यी \_* = *एक्स* मैं + *ए*  ... (1)

होने देना अर्थ का नया टिप्पणियों होना *य* . तब

1 *एन य*

∑

*i*

*य* = *एन मैं* = 1

1 *एन*

*एन मैं* = 1

∑

( *एक्स मैं*

+ *ए* )

1  *एन*

+ *एन*   1 *एन*  *ना*

= *एन* ∑ *मैं*

∑ *ए*  =

*एन* ∑ *एक्स मैं* +

= *एक्स* + *ए*

*एन*

 *मैं* = 1

*मैं* = 1 

*मैं* = 1

यानी *वाई* = + *ए*  ... (2)

इस प्रकार, झगड़ा का नया टिप्पणियों

2 = ∑ ( *y i* − *य* ) 2 = ∑ ( *एक्स मैं* + *ए* −

*n*

*n*

1

1

*एक्स* − *ए* ) 2

[उपयोग करना (1) और (2)]

2  *एन मैं* = 1 *एन मैं* = 1

1 *एन*  2

=  ∑ ( *मैं* − *एक्स* )

1

*मैं* = 1

*n*

= *σ* 2

इस प्रकार, झगड़ा का नया टिप्पणियों है वही जैसा वह का मूल अवलोकन.

each observation of a group does not affect the variance.

�Note We may note that adding (or subtracting) a positive number to (or from)

उदाहरण 16 अर्थ और मानक विचलन का 100 टिप्पणियों थे गणना जैसा एक छात्र द्वारा क्रमशः 40 और 5.1, जिसने गलती से एक के लिए 40 के बजाय 50 ले लिया अवलोकन। क्या हैं सही अर्थ और मानक विचलन?

सांख्यिकी 285

समाधान दिया गया वह संख्या का टिप्पणियों ( *एन* ) *=* 100

ग़लत अर्थ ( ) = 40,

ग़लत मानक विचलन ( σ ) = 5.1

1 *एन*

हम जानते है कि

*एक्स* = ∑ *एक्स मैं*

*मैं* = 1

*n*

40 = 1

∑

100

100

100

∑

अर्थात

*मैं* या

*मैं* = 1

*मैं* = 1

*मैं* = 4000

यानी ग़लत जोड़ का टिप्पणियों = 4000

इस प्रकार सही जोड़ का टिप्पणियों = ग़लत जोड़ – 50 + 40

= 4000 – 50 + 40 = 3990

सही जोड़

इसलिए सही है अर्थ =

3990

= 39.9

=

100 100

मानक भी विचलन =

*n*

1 ∑

*n*

*i*

2 −

*i* =1

*n*2

1  ∑*n*

 *i* =1 

*x* 

2

*i*

=

1

*n*

∑

*n*

*x* −(*x* )

2

2

*i*

*i* =1

यानी 5.1 =

1

100

× Incorrect ∑ *x* 2 − (40)2

*n*

*i*

*i* =1

या 26.01 =

1

100

× ग़लत ∑ *एक्स मैं*

*मैं* = 1

*n*

2

– 1600

*n*

इसलिए ग़लत ∑

*i*

*मैं* = 1

2 = 100 (26.01 + 1600) = 162601

*n*

अब सही ∑

*एन*

2 2 2 2

*i* = Incorrect ∑ *x* – (50) + (40)

*मैं*

*मैं* = 1

*मैं* = 1

= 162601 – 2500 + 1600 = 161701

इसलिए सही है मानक विचलन

286 गणित

=

Correct *x*

∑

2

*i*

– (Correct mean)2

*n*

=

161701 − (39 9)2

100

=== 5 \_

1617 01 − 1592*.*01



25

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 13

1. अर्थ और झगड़ा का आठ टिप्पणियों हैं 9 और 9.25, क्रमश। अगर छह का टिप्पणियों हैं 6, 7, 10, 12, 12 और 13, खोजो शेष दो अवलोकन.
2. अर्थ और झगड़ा का 7 टिप्पणियों हैं 8 और 16, क्रमश। अगर पाँच का टिप्पणियों हैं 2, 4, 10, 12, 14. खोजो शेष दो अवलोकन.
3. अर्थ और मानक विचलन का छह टिप्पणियों हैं 8 और 4, क्रमश। अगर प्रत्येक अवलोकन है गुणा किया हुआ द्वारा 3, खोजो नया अर्थ और नया मानक विचलन का इस कारण हुई अवलोकन.
4. दिया गया वह *एक्स* है अर्थ और σ 2 है झगड़ा का *एन* टिप्पणियों *एक्स* , *एक्स* , ..., *एक्स* .

1 2 *एन*

सिद्ध करना वह अर्थ और झगड़ा का टिप्पणियों *कुल्हाड़ी* 1 , *कुल्हाड़ी* 2 , *कुल्हाड़ी* 3 , , *कुल्हाड़ी एन* हैं

*ए* और *एक* 2 σ 2 , क्रमश, ( *ए* ≠ 0).

1. 20 प्रेक्षणों का माध्य और मानक विचलन 10 और 2 पाया गया, क्रमश। दोबारा जांच करने पर पाया गया कि एक अवलोकन 8 गलत था। गणना सही अर्थ और मानक विचलन में प्रत्येक का अगले मामले:
   1. अगर गलत वस्तु है छोड़ा गया. (ii) अगर यह है जगह ले ली द्वारा 12.
2. 100 अवलोकनों के समूह का माध्य और मानक विचलन पाया गया क्रमशः 20 और 3 हों। बाद में पता चला कि तीन अवलोकन थे गलत, जो 21, 21 और 18 के रूप में दर्ज किए गए थे। माध्य और मानक ज्ञात कीजिए विचलन अगर गलत टिप्पणियों हैं छोड़ा गया.

*Summary*

�Measures of dispersion Range, Quartile deviation, mean deviation, variance, standard deviation are measures of dispersion.

Range = Maximum Value – Minimum Value

�Mean deviation for ungrouped data

M.D. (*x* ) = ∑ *xi – x ,* M.D. (M) = ∑ *xi –* M

*n*

सांख्यिकी 287

�Mean deviation for grouped data

M.D. (*x* ) =

∑ *fi xi* *x*

∑ *fi xi* M

N

, M.D. (M) =

N

, where N = ∑ *fi*

�Variance and standard deviation for ungrouped data

*σ* 2 = 1 ∑(

*i*

*– x* )2 ,

*σ* =

1 ∑(

*n*

*i*

– *x* )2

�Variance and standard deviation of a discrete frequency distribution

*σ* 2 = 1 *f x* − *x* ,

N

∑

(

)

2

*i* *i*

*σ* =

1

N

∑

*f x* − *x*

*i* *i*

(

)

2

�Variance and standard deviation of a continuous frequency distribution

*σ* 2 = 1 *f x* − *x* ,

N

∑ *i* *i*

(

)

2

*σ* =

1

N

N *f x* −

∑ *i i* ∑

2

(

*f x*

*i i*

)

2

�Shortcut method to find variance and standard deviation.

*σ* 2 =

*h*

2

N2





N *f y* −

∑ *i i* ∑

2

(

*f y* *σ* =

) ,

2

*i i*





*h*

N

N *f y* − *f y*

∑ *i i* ∑ *i i*

2

(

) ,

2

where *yi* =

*x* A

*i*

*h*

*Historical Note*

‘Statistics’ is derived from the Latin word ‘status’ which means a political state. This suggests that statistics is as old as human civilisation. In the year 3050 B.C., perhaps the first census was held in Egypt. In India also, about 2000 years ago, we had an efficient system of collecting administrative statistics, particularly, during the regime of Chandra Gupta Maurya (324-300 B.C.). The system of collecting data related to births and deaths is mentioned in Kautilya’s *Arthshastra* (around 300 B.C.) A detailed account of administrative surveys conducted during Akbar’s regime is given in *Ain-I-Akbari* written by Abul Fazl.

Captain John Graunt of London (1620-1674) is known as father of vital statistics due to his studies on statistics of births and deaths. Jacob Bernoulli (1654-1705) stated the Law of Large numbers in his book “Ars Conjectandi’, published in 1713.

288 गणित

The theoretical development of statistics came during the mid seventeenth century and continued after that with the introduction of theory of games and chance (i.e., probability). Francis Galton (1822-1921), an Englishman, pioneered the use of statistical methods, in the field of Biometry. Karl Pearson (1857-1936) contributed a lot to the development of statistical studies with his discovery of *Chi square test* and foundation of *statistical laboratory* in England (1911). Sir Ronald A. Fisher (1890-1962), known as the Father of modern statistics, applied it to various diversified fields such as Genetics, Biometry, Education, Agriculture, etc.

— **�** —

अध्याय 14

PROBABILITY

� कहाँ *ए गणितीय तर्क कर सकना होना था, यह है जैसा महान ए FOLLY को बनाना उपयोग का कोई अन्य, जैसा को अंधे की तरह खोजना के लिए ए चीज़ में अँधेरा, कब*

*आप पास होना ए मोमबत्ती में आपका हाथ। – जॉन आर्बुथनॉट* �

* 1. आयोजन

हमने एक से जुड़े यादृच्छिक प्रयोग और नमूना स्थान के बारे में अध्ययन किया है प्रयोग। नमूना स्थान संबंधित सभी प्रश्नों के लिए एक सार्वभौमिक सेट के रूप में कार्य करता है साथ प्रयोग।

विचार करना प्रयोग का पटकना ए सिक्का दो बार. एक संबंधित नमूना अंतरिक्ष है एस = {एचएच, एचटी, टीएच, टीटी}.

अब मान लीजिए कि हम उन परिणामों में रुचि रखते हैं जो इसके अनुरूप हैं बिल्कुल एक सिर की घटना. हम पाते हैं कि HT और TH, S के एकमात्र तत्व हैं संगत को घटना का यह हो रहा (आयोजन)। इन दो तत्वों रूप तय करना इ = { एचटी, वां}

हम जानना वह तय करना इ है ए सबसेट का नमूना अंतरिक्ष एस . इसी प्रकार, हम खोजो अगले पत्र-व्यवहार बीच में आयोजन और सबसेट का एस।

विवरण का संगत घटनाएँ सबसेट का 'एस'

संख्या का पूंछ है बिल्कुल 2 ए = {टीटी}

संख्या का पूंछ है कम से कम एक बी = {एचटी, टीएच, टीटी} संख्या का सिर है अधिक से अधिक एक सी = {एचटी, टीएच, टीटी} दूसरा टॉस है नहीं मुखिया डी = { एचटी, टीटी}

संख्या का पूंछ है अधिक से अधिक दो एस = {एचएच, एचटी, वां, टीटी}

संख्या का पूंछ है अधिक बजाय दो φ

उपरोक्त चर्चा से पता चलता है कि नमूना स्थान का एक सबसेट जुड़ा हुआ है एक घटना और एक घटना नमूना स्थान के सबसेट से जुड़ी है। इसके आलोक में हम परिभाषित करना एक आयोजन जैसा अनुसरण करता है।

परिभाषा कोई सबसेट इ का ए नमूना अंतरिक्ष एस है बुलाया *एक आयोजन* ।

290 गणित

* + 1. *किसी घटना का घटित होना* पासा फेंकने के प्रयोग पर विचार करें। चलो ई अर्थ है आयोजन “ ए संख्या कम बजाय 4 प्रकट होता है"। अगर वास्तव में '1' था दिखाई दिया पर मरो तो हम कहते हैं कि घटना E घटित हुई है। वास्तव में यदि परिणाम 2 या 3 हैं, हम कहना वह आयोजन इ है घटित हुआ

इस प्रकार, आयोजन इ का ए नमूना अंतरिक्ष एस है कहा को पास होना घटित हुआ अगर नतीजा प्रयोग का *ω* ऐसा है ∈ E. यदि परिणाम *ω* ऐसा है कि *ω* ∉ E, तो हम कहते हैं वह आयोजन इ है नहीं घटित हुआ।

* + 1. *घटनाओं के प्रकार* घटनाओं को आधार पर विभिन्न प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है तत्वों वे पास होना।

1. असंभव और ज़रूर आयोजन खाली तय करना φ और नमूना अंतरिक्ष एस वर्णन करना आयोजन। में तथ्य φ है बुलाया एक *असंभव आयोजन* और एस, अर्थात, साबुत नमूना अंतरिक्ष है बुलाया *ज़रूर आयोजन* ।

को समझना इन होने देना हम विचार करना प्रयोग का रोलिंग ए मरना। संबंधित नमूना अंतरिक्ष है

एस = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

मान लीजिए घटना E है "पासे पर दिखाई देने वाली संख्या 7 का गुणज है"। क्या आप कर सकते हैं लिखना सबसेट संबंधित साथ आयोजन इ?

स्पष्ट रूप से नहीं नतीजा संतुष्ट स्थिति दिया गया में आयोजन, अर्थात, नहीं तत्व का नमूना स्थान घटना ई की घटना सुनिश्चित करता है। इस प्रकार, हम कहते हैं कि खाली सेट केवल घटना E के अनुरूप है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि ऐसा करना असंभव है पासे के ऊपरी सतह पर 7 का गुणज रखें। इस प्रकार, घटना E = φ असंभव है आयोजन।

अब होने देना हम लेना ऊपर एक और आयोजन एफ “द संख्या मोड़ों ऊपर है विषम या यहां तक की"। स्पष्ट रूप से

एफ = {1, 2, 3, 4, 5, 6,} = एस, अर्थात, सभी परणाम का प्रयोग सुनिश्चित करना घटना का आयोजन एफ। इस प्रकार, आयोजन एफ = एस है ए ज़रूर आयोजन।

1. साधारण घटना यदि किसी घटना E में नमूना स्थान का केवल एक नमूना बिंदु है, तो यह है बुलाया ए *सरल* (या *प्राथमिक* ) *आयोजन* ।

*n विशिष्ट तत्वों* वाले नमूना स्थान में , बिल्कुल *n* सरल तत्व होते हैं आयोजन।

के लिए उदाहरण में प्रयोग का पटकना दो सिक्के, ए नमूना अंतरिक्ष है एस={एचएच, एचटी, टीएच, टीटी}

वहाँ हैं चार सरल आयोजन संगत को यह नमूना अंतरिक्ष। इन हैं ई 1 = {एचएच}, ई 2 ={एचटी}, ई 3 = { वां} और ई 4 ={टीटी}.

संभाव्यता 291

1. मिश्रण आयोजन अगर एक आयोजन है अधिक बजाय एक नमूना बिंदु, यह है बुलाया ए

*मिश्रण आयोजन* ।

के लिए उदाहरण, में प्रयोग का “फेंकना ए सिक्का तीन बार" आयोजन इ: 'बिल्कुल एक सिर दिखाई दिया'

एफ: 'कम से कम एक सिर दिखाई दिया'

जी: 'अधिक से अधिक एक सिर दिखाई दिया' वगैरह।

हैं सभी मिश्रण आयोजन। सबसेट का एस संबंधित साथ इन आयोजन हैं ई={एचटीटी,टीएचटी,टीटीएच}

F={HTT,THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH} G= {TTT, THT, HTT, TTH}

प्रत्येक का ऊपर सबसेट रोकना अधिक बजाय एक नमूना बिंदु, इस तरह वे हैं सभी मिश्रण आयोजन।

* + 1. *घटनाओं का बीजगणित* समुच्चयों के अध्याय में हमने विभिन्न के बारे में अध्ययन किया है तौर तरीकों का का मेल दो या अधिक सेट, अर्थात, संघ, चौराहा, अंतर, पूरक का ए तय करना वगैरह। वैसे ही हम कर सकना मिलाना दो या अधिक आयोजन द्वारा का उपयोग करते हुए अनुरूप तय करना संकेतन.

होने देना ए, बी, सी होना आयोजन संबंधित साथ एक प्रयोग किसका नमूना अंतरिक्ष है एस।

1. पूरक आयोजन के लिए प्रत्येक आयोजन ए, वहाँ मेल खाती है एक और आयोजन

#### ए ' बुलाया पूरक आयोजन को एक। यह है भी बुलाया *आयोजन 'नहीं* ए'।

के लिए उदाहरण, लेना प्रयोग 'का पटकना तीन सिक्के'. एक संबंधित नमूना

अंतरिक्ष है

एस = {एचएचएच, एचएचटी, एचटीएच, THH, एचटीटी, टीएचटी, टीटीएच, टीटीटी}

होने देना ए={एचटीएच, एचएचटी, THH} होना आयोजन 'केवल एक पूँछ प्रकट होता है'

स्पष्ट रूप से के लिए नतीजा एचटीटी, आयोजन ए है नहीं घटित हुआ। लेकिन हम मई कहना वह घटना 'ए नहीं' घटित हुई है। इस प्रकार, प्रत्येक परिणाम के साथ जो ए में नहीं है, हम कहते हैं वह 'नहीं ए' घटित होना।

इस प्रकार पूरक घटना 'नहीं ए' घटना के लिए ए है ए ' = {एचएचएच, एचटीटी, टीएचटी, टीटीएच, टीटीटी}

या ए '' = { ओह : ओह ∈ एस और ∉ ए} = एस – एक।

1. घटना 'ए या बी' दो समुच्चयों ए और बी के मिलन को ए ∪ बी द्वारा निरूपित करें रोकना सभी वे तत्वों कौन हैं दोनों में से एक में ए या में बी या में दोनों।

कब सेट ए और बी हैं दो आयोजन संबंधित साथ ए नमूना अंतरिक्ष, तब 'ए ∪ बी' घटना 'या तो ए या बी या दोनों' है। इस घटना 'ए ∪ बी' को 'ए या बी' भी कहा जाता है। इसलिए घटना 'ए या बी' = ए ∪ बी

= { ω : ω ∈ ए या ∈ बी}

292 गणित

1. घटना 'ए और बी' हम जानते हैं कि दो सेटों का प्रतिच्छेदन ए ∩ बी का सेट है वे तत्वों कौन हैं सामान्य को दोनों ए और बी। अर्थात, कौन संबंधित को दोनों 'ए और बी'।

यदि A और B दो घटनाएँ हैं, तो समुच्चय A ∩ B घटना 'A और B' को दर्शाता है। इस प्रकार, ए ∩ बी = { ω : ω ∈ ए और ω ∈ बी}

उदाहरण के लिए, 'एक पासे को दो बार फेंकने' के प्रयोग में मान लीजिए कि घटना A है 'अंक पर पहला फेंक है छह' और बी है आयोजन 'जोड़ का दो स्कोर है कम से कम 11' तब

ए = {(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}, और बी = {(5,6), (6,5), (6,6)} इसलिए ए ∩ बी = {(6,5), (6,6)}

टिप्पणी वह तय करना ए ∩ बी = {(6,5), (6,6)} मई प्रतिनिधित्व करना आयोजन 'द अंक पर पहला

फेंक छह और है का योग स्कोर है कम से कम 11'।

1. घटना 'ए लेकिन बी नहीं' हम जानते हैं कि ए-बी उन सभी तत्वों का समुच्चय है कौन हैं में ए लेकिन नहीं में बी। इसलिए, तय करना ए-बी मई निरूपित आयोजन 'ए लेकिन नहीं बी'.हम जानना वह

ए – बी = ए ∩ बी

उदाहरण 1 पासे को घुमाने के प्रयोग पर विचार करें। मान लीजिए 'ए' प्राप्त होने की घटना 'ए' है अभाज्य संख्या', बी घटना 'विषम संख्या प्राप्त करना' हो। प्रतिनिधित्व करने वाले समुच्चय लिखिए आयोजन (मैं) औरो बी (ii) ए और बी (iii) ए लेकिन नहीं बी (iv) 'नहीं ए'।

समाधान यहां एस = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, ए = {2, 3, 5} और बी = {1, 3, 5}

ज़ाहिर तौर से

(मैं) 'ए या बी' = ए ∪ बी = {1, 2, 3, 5}

* 1. 'ए और बी' = ए ∩ बी = {3,5}
  2. 'ए लेकिन नहीं बी' = ए – बी = {2}

(iv) 'नहीं ए' = ए ' = {1,4,6}

* + 1. *परस्पर अनन्य आयोजन* में प्रयोग का रोलिंग ए मरना, ए नमूना अंतरिक्ष एस = {1, 2, 3, 4, 5, 6} है । घटनाओं पर विचार करें, A 'एक विषम संख्या प्रकट होती है' और B 'एक सम संख्या संख्या प्रकट होता है'

स्पष्ट रूप से आयोजन ए इससे बाहर रखा गया आयोजन बी और उपाध्यक्ष उलटा. में अन्य शब्द, वहाँ है नहीं नतीजा कौन सुनिश्चित घटना का आयोजन ए और बी इसके साथ ही। यहाँ

ए = {1, 3, 5} और बी = {2, 4, 6}

स्पष्ट रूप से ए ∩ बी = φ , अर्थात, ए और बी हैं विभिन्न करना सेट.

सामान्य तौर पर, दो घटनाओं A और B को *परस्पर अपवर्जी* घटनाएँ कहा जाता है यदि घटना का कोई एक का उन्हें इससे बाहर रखा गया घटना का अन्य आयोजन, अर्थात, अगर वे कर सकना नहीं एक साथ घटित होता है. में इस मामले में सेट ए और बी हैं विच्छेद.

संभाव्यता 293

फिर से अंदर का प्रयोग रोलिंग मरना, विचार करना आयोजन ए 'विषम संख्या प्रकट होता है' और आयोजन बी 'ए संख्या कम बजाय 4 प्रकट होता है'

ज़ाहिर तौर से ए = {1, 3, 5} और बी = {1, 2, 3}

अब 3 ∈ ए जैसा कुंआ जैसा 3 ∈ बी

इसलिए, ए और बी परस्पर अनन्य घटनाएँ नहीं हैं।

*टिप्पणी* सरल आयोजन का ए नमूना अंतरिक्ष हैं हमेशा परस्पर अनन्य।

* + 1. *संपूर्ण आयोजन* विचार करना प्रयोग का फेंकने ए मरना। हम पास होना एस = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. होने देना हम परिभाषित करना अगले आयोजन

ए: 'ए संख्या कम बजाय 4 प्रकट होता है',

बी: 'ए संख्या ग्रेटर बजाय 2 लेकिन कम बजाय 5 प्रकट होता है'

और सी: 'ए संख्या ग्रेटर बजाय 4 प्रकट होता है'।

तब ए = {1, 2, 3}, बी = {3,4} और सी = {5, 6}। हम उसका अवलोकन करते हैं

ए ∪ बी ∪ सी = {1, 2, 3} ∪ {3, 4} ∪ {5, 6} = एस।

ऐसा आयोजन ए, बी और सी हैं बुलाया संपूर्ण आयोजन। में सामान्य, अगर ई 1 , ई 2 , ..., ई एन हैं *एन*

आयोजन का ए नमूना अंतरिक्ष एस और अगर

*एन*

ई 1 ∪ ई 2 ∪ ई 3 ∪ *...* ∪ ई *एन* = ∪ ई *मैं* = एस

*मैं* =1

फिर इ 1 , इ 2 , ...., इ एन *संपूर्ण घटनाएँ* कहलाती हैं । दूसरे शब्दों में, घटनाएँ E 1 , E 2 , ..., E *n* संपूर्ण तब कहा जाता है जब उनमें से कम से कम एक आवश्यक रूप से घटित होता है प्रयोग है प्रदर्शन किया।

आगे, अगर ई *मैं* ∩ ई *जे* = φ के लिए *मैं* ≠ *जे* अर्थात, आयोजन ई *मैं* और ई *जे* हैं जोड़ो में विभिन्न करना और

*एन*

∪ ई *मैं* = एस , तब आयोजन ई 1 , ई 2 , ..., ई *एन* हैं बुलाया *परस्पर अनन्य और संपूर्ण*

*i* =1

*आयोजन* ।

हम अब विचार करना कुछ उदाहरण।

उदाहरण 2 दो पासा हैं फेंक दिया और जोड़ का नंबर कौन आना ऊपर पर पासा है विख्यात। होने देना हम विचार करना अगले आयोजन संबंधित साथ यह प्रयोग

ए: 'योग सम है'।

बी: 'द जोड़ है ए एकाधिक का 3'. सी: 'द जोड़ है से कम 4'.

डी: 'द जोड़ है ग्रेटर 11' से अधिक.

कौन जोड़े का इन आयोजन हैं परस्पर अनन्य?

294 गणित

समाधान वहाँ हैं 36 तत्वों में नमूना अंतरिक्ष एस = {( *एक्स* , *य* ): *एक्स* , *य* = 1, 2, 3, 4, 5, 6}. तब

ए = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4),

(4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}

बी = {(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4),

(6, 6)}

सी = {(1, 1), (2, 1), (1, 2)} और डी = {(6, 6)}

हम खोजो वह

ए ∩ बी = {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)} ≠ पीएचआई

इसलिए, A और B परस्पर अनन्य घटनाएँ नहीं हैं। उसी प्रकार ए ∩ सी ≠ φ , ए ∩ डी ≠ φ , बी ∩ सी ≠ φ और बी ∩ डी ≠ φ .

इस प्रकार, जोड़े का आयोजन, (ए, सी), (ए, डी), (बी, सी), (बी, डी) हैं नहीं परस्पर अनन्य

आयोजन।

भी सी ∩ डी = φ और इसलिए सी और डी हैं परस्पर अनन्य आयोजन।

उदाहरण 3 ए सिक्का है फेंक दिया तीन समय, विचार करना अगले आयोजन।

ए: 'नहीं सिर प्रकट होता है', बी: 'बिल्कुल एक सिर प्रकट होता है' और सी: 'कम से कम दो सिर के जैसा लगना'।

करना वे रूप ए तय करना का परस्पर अनन्य और संपूर्ण आयोजन?

समाधान नमूना अंतरिक्ष का प्रयोग है

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

और ए = {टीटीटी}, बी = {एचटीटी, टीएचटी, टीटीएच}, सी = {एचएचटी, एचटीएच, THH, HHH}

अब

A ∪ B ∪ C = {TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH} = S

इसलिए, ए, बी और सी हैं संपूर्ण आयोजन। यह भी एक ∩ बी = φ , ए ∩ सी = φ और बी ∩ सी = φ

इसलिए, आयोजन हैं जोड़ी के लिहाज से विच्छेद, अर्थात, वे हैं परस्पर अनन्य।

इस तरह, ए, बी और सी रूप ए तय करना परस्पर का अनन्य और विस्तृत घटनाएँ.

EXERCISE 14.1

1. ए मरना है लुढ़का हुआ। होने देना इ होना आयोजन "मरना दिखाता है 4" और एफ होना आयोजन "मरना दिखाता है यहां तक की संख्या"। हैं इ और एफ परस्पर अनन्य?
2. ए मरना है फेंक दिया. वर्णन करना अगले आयोजन:
   1. ए: 7 से कम संख्या (ii) बी: ए संख्या ग्रेटर बजाय 7

(iii) सी: ए एकाधिक का 3 (iv) डी: से एक संख्या कम 4

(वी) इ: एक यहां तक की संख्या ग्रेटर बजाय 4 (vi) एफ: ए संख्या नहीं कम बजाय 3 भी खोजो ए ∪ बी ० ए ∩ बी, बी ∪ सी, इ ∩ एफ, डी ∩ इ, ए – सी, डी – इ, इ ∩ एफ ' , एफ '

संभाव्यता 295

1. एक प्रयोग में पासों की एक जोड़ी को घुमाना और संख्याओं को रिकॉर्ड करना शामिल है आना ऊपर। वर्णन करना अगले आयोजन:

ए: जोड़ है ग्रेटर बजाय 8, बी: 2 घटित होना पर दोनों में से एक मरना सी: जोड़ है पर कम से कम 7 और ए एकाधिक का 3.

कौन जोड़े का इन आयोजन हैं परस्पर अनन्य?

1. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। मान लीजिए A घटना 'थ्री हेड्स शो'' को दर्शाता है, B घटना को "दो चित और एक पूँछ दिखाएँ" दर्शाएँ, C घटना को तीन पूँछ दिखाएँ दिखाओ और डी निरूपित आयोजन 'ए सिर दिखाता है पर पहला सिक्का” कौन आयोजन हैं
   1. परस्पर अनन्य? (ii) सरल? (iii) मिश्रण?
2. तीन सिक्के हैं फेंक दिया. वर्णन करना
   1. दो आयोजन कौन हैं परस्पर अनन्य।
   2. तीन आयोजन कौन हैं परस्पर अनन्य और संपूर्ण.
   3. दो आयोजन, कौन हैं नहीं परस्पर अनन्य।
   4. दो आयोजन कौन हैं परस्पर अनन्य लेकिन नहीं संपूर्ण.
   5. तीन आयोजन कौन हैं परस्पर अनन्य लेकिन नहीं संपूर्ण.
3. दो पासा हैं फेंक दिया. आयोजन ए, बी और सी हैं जैसा इस प्रकार है: ए: उपार्जन एक यहां तक की संख्या पर पहला मरना।

बी: उपार्जन एक विषम संख्या पर पहला मरना।

सी: उपार्जन जोड़ का नंबर पर पासा ≤ 5.

वर्णन करना आयोजन

* 1. ए ' (ii) नहीं बी (iii) ए या बी

(iv) ए और बी (वी) ए लेकिन नहीं सी (vi) बी या सी

(vii) बी और सी (आठवीं) ए ∩ बी ' ∩ सी '

1. संदर्भ देना को सवाल 6 ऊपर, राज्य सत्य या असत्य: (देना कारण के लिए आपका उत्तर)
   1. ए और बी हैं परस्पर अनन्य
   2. ए और बी हैं परस्पर अनन्य और संपूर्ण
   3. ए = बी '
   4. ए और सी हैं परस्पर अनन्य
   5. ए और बी ' हैं परस्पर अनन्य।
   6. ए ' , बी ' , सी हैं परस्पर अनन्य और संपूर्ण.

#### सिद्ध दृष्टिकोण को संभावना

पिछले अनुभागों में, हमने यादृच्छिक प्रयोगों, नमूना स्थान और पर विचार किया है इन प्रयोगों से जुड़ी घटनाएँ। हम अपने दैनिक जीवन में अनेक शब्दों का प्रयोग करते हैं घटनाओं के घटित होने की संभावनाओं के बारे में. संभाव्यता सिद्धांत मात्रा निर्धारित करने का प्रयास करता है इन अवसरों का घटना या गैर घटना का आयोजन।

296 गणित

में पहले कक्षाएं, हम पास होना अध्ययन कुछ तरीकों का नियत संभावना को एक आयोजन संबंधित साथ एक प्रयोग होना ज्ञात संख्या का कुल परिणाम.

सिद्ध दृष्टिकोण है एक और रास्ता का का वर्णन संभावना का एक आयोजन। में यह दृष्टिकोण कुछ अभिगृहीत या नियम हैं चित्रित को सौंपना सम्भावनाएँ

मान लीजिए S एक यादृच्छिक प्रयोग का नमूना स्थान है। प्रायिकता P वास्तविक है मूल्यवान फ़ंक्शन जिसका डोमेन S का पावर सेट है और रेंज अंतराल है [0,1] संतुष्टि देने वाला अगले अभिगृहीत

1. के लिए कोई आयोजन इ, पी (इ) ≥ 0 (ii) पी (एस) = 1

(iii) अगर इ और एफ हैं परस्पर अनन्य घटनाएँ, फिर पी.ई ∪ एफ)= पी(ई) + पी(एफ).

यह इस प्रकार से (iii) वह पी( φ ) = 0. को सिद्ध करना यह, हम लेना एफ = φ और टिप्पणी वह इ और φ

हैं विभिन्न करना आयोजन। इसलिए, से स्वयंसिद्ध (iii), हम पाना

पी (इ ∪ φ ) = पी (ई) + पी ( φ ) या पी.ई) = पी.ई) + पी ( φ ) अर्थात पी ( φ ) = 0.

होने देना एस होना ए नमूना अंतरिक्ष युक्त परणाम 1 , ω 2 ,..., ω *एन* , अर्थात,

एस = { ω 1 , ω 2 , ..., ω *एन* }

यह इस प्रकार से सिद्ध परिभाषा का संभावना वह

(मैं) 0 ≤ पी ( ω *मैं* ) ≤ 1 के लिए प्रत्येक ω *मैं* ∈ एस (ii) पी ( ω 1 ) + पी ( ω 2 ) + ... + पी ( ω *एन* ) = 1

(iii) के लिए कोई आयोजन ए, पी(ए) = ∑ पी( ω *मैं* ), ω *मैं* ∈ एक।

for notational convenience, we write P(ω*i* ) for P({ω*i* }).

�Note It may be noted that the singleton {ω*i*} is called elementary event and

1

के लिए उदाहरण, में 'ए सिक्का उछालना' प्रयोग हम कर सकना सौंपना संख्या 2 को प्रत्येक

का परणाम एच और टी।

11 \_

अर्थात पी(एच) = 2 और पी(टी) = 2

(1)

स्पष्ट रूप से यह कार्यभार संतुष्ट दोनों स्थितियाँ अर्थात, प्रत्येक संख्या है कोई भी नहीं कम बजाय शून्य और न ग्रेटर बजाय 1 और

11 \_

पी(एच) + पी(टी) = 2 + 2 = 1

11 \_

इसलिए, में यह मामला हम कर सकना कहना वह संभावना का एच = 2 , और संभावना का टी = 2

1

अगर हम लेना पी(एच) = 4

3

और पी(टी) = 4

... (2)

संभाव्यता 297

करता है यह कार्यभार संतुष्ट स्थितियाँ का सिद्ध दृष्टिकोण?

1 3

हाँ, में यह मामला, संभावना का एच = 4 और संभावना का टी = 4 .

हम खोजो वह दोनों कार्य (1) और (2) हैं वैध के लिए संभावना का एच और टी।

दोनों परिणामों को संख्याएँ *p* और (1 – *p ) इस प्रकार निर्दिष्ट कर सकते हैं* 0 ≤ *पी* ≤ 1 और पी(एच) + पी(टी) = *पी* + (1 – *पी* ) = 1

यह कार्यभार, बहुत, संतुष्ट दोनों स्थितियाँ का सिद्ध दृष्टिकोण का

संभावना। इस तरह, हम कर सकना कहना वह वहाँ हैं अनेक तौर तरीकों (की अपेक्षा अनंत) को सौंपना संभावनाओं को परणाम का एक प्रयोग। हम अब विचार करना कुछ उदाहरण।

उदाहरण 4 होने देना ए नमूना अंतरिक्ष होना एस = { ω 1 , ω 2 ,..., ω 6 }.कौन सा का अगले कार्य का संभावनाओं को प्रत्येक नतीजा हैं वैध?

परिणाम 1 2 3 4 5 6

###### 1 1 1 1 1 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (ए) | 6 |  | 6 |  | 6 |  | 6 |  | 6 |  | 6 |
| (बी) | 1 |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 |

###### 1 2 1

###### 8 3 3

1 1 1

###### 1 - 1 - 1

3 4 3

###### 1 1 3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (डी) | 12 |  | 12 | 6 | 6 | 6 | 2 |
| (इ) | 0.1 |  | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |

समाधान (ए) स्थिति (मैं): प्रत्येक का संख्या पी( ω *मैं* ) है सकारात्मक और कम बजाय एक।

स्थिति (ii): जोड़ का संभावनाओं

###### = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1

6 6 6 6 6 6

इसलिए, कार्यभार है वैध

1. शर्त (i): प्रत्येक संख्या *p* ( ω *i* ) या तो 0 या 1 है। स्थिति (ii) जोड़ का संभावनाओं = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 इसलिए, कार्यभार है वैध
2. स्थिति (मैं) दो का संभावनाओं *पी* ( ω ) और *पी* ( ω ) हैं नकारात्मक, कार्यभार

है नहीं वैध

1. तब से *पी* ( ω ) =

6

5 6

3

2 > 1, कार्यभार है नहीं वैध

298 गणित

1. तब से, जोड़ का संभावनाओं = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1, कार्यभार है नहीं वैध।
   * 1. *संभावना का एक आयोजन* होने देना एस होना ए नमूना अंतरिक्ष संबंधित साथ प्रयोग 'एक मशीन द्वारा उत्पादित लगातार तीन पेन की जांच करना और उन्हें अच्छे के रूप में वर्गीकृत किया गया (गैर-दोषपूर्ण) और खराब (दोषपूर्ण)'. हम मई पाना 0, 1, 2 या 3 दोषपूर्ण कलम जैसा परिणाम का यह इंतिहान।

ए नमूना अंतरिक्ष संबंधित साथ यह प्रयोग है

एस = {बीबीबी, बीबीजी, बी जी बी, जीबीबी, बीजीजी, जीबीजी, जीजीबी, जीजीजी},

कहाँ बी खड़ा के लिए ए दोषपूर्ण या खराब कलम और जी के लिए ए गैर – दोषपूर्ण या अच्छा कलम।

होने देना संभावनाओं सौंपा गया को परणाम होना जैसा इस प्रकार

नमूना बिंदु: बीबीबी बीबीजी बी जी बी जीबीबी बीजीजी जीबीजी जीजीबी जीजीजी

1 1 1 1 1

संभाव्यता: 8 8 8 8 8

1 1 1

8 8 8

होने देना आयोजन ए: वहाँ है बिल्कुल एक दोषपूर्ण कलम और आयोजन बी: वहाँ हैं कम से कम दो दोषपूर्ण कलम.

इस तरह ए = {बीजीजी, जीबीजी, जीजीबी} और बी = {बीबीजी, बी जी बी, जीबीबी, बीबीबी}

अब पी(ए) =

∑ पी( *ω मैं ),* ∀ *ω i* ∈ *ए*

= पी(बीजीजी) + पी(जीबीजी) + पी(जीजीबी) =

1 + 1 + 1 = 3

और पी(बी) = ∑ पी( *मैं ),* ∀ *ω i* ∈ *बी*

8 8 8 8

= पी(बीबीजी) + पी(बीजीबी) + पी(जीबीबी) + पी(बीबीबी) =

1 +1 \_ +1+ \_ \_ 1 = 4 = 1

8 8 8 8 8 2

होने देना हम विचार करना एक और प्रयोग का 'फेंकना ए सिक्का "दो बार" नमूना अंतरिक्ष इस प्रयोग का एस है = {एचएच, एचटी, वां, टीटी}

होने देना अगले संभावनाओं होना सौंपा गया को परणाम

1 1 2 9

पी(एचएच) = 4 , पी(एचटी) = 7 , पी(टीएच) = 7 , पी(टीटी) = 28

स्पष्ट रूप से यह कार्यभार संतुष्ट स्थितियाँ का सिद्ध दृष्टिकोण। अब, होने देना हम खोजो संभावना का आयोजन इ: 'दोनों उछालों उपज वही परिणाम'।

यहां ई = {एचएच, टीटी}

अब पी(ई) = Σ पी( *डब्ल्यूआई )* , के लिए सभी *डब्ल्यू मैं* ∈ वह

संभावना 299

= पी(एचएच) + पी(टीटी) =

1 + 9 = 4

4 28 7

के लिए आयोजन एफ: 'बिल्कुल दो सिर', हम पास होना एफ = {एचएच}

1

और पी(एफ) = पी(एचएच) =

4

* + 1. *संभावनाओं का समान रूप से संभावित परणाम* होने देना ए नमूना अंतरिक्ष का एक प्रयोग होना

एस = { ω 1 , ω 2 ,..., ω *एन* }.

होने देना सभी परणाम हैं समान रूप से संभावित को घटित होना, अर्थात, मौका का घटना का प्रत्येक साधारण घटना समान होनी चाहिए.

अर्थात P( ω *i* ) = *पी* , के लिए सभी ω *मैं* ∈ एस कहाँ 0 ≤ *पी* ≤ 1

*एन*

तब से

∑ पी ( *ω i* *)* *1* अर्थात, *पी* + *पी* + ... + *पी* ( *एन* समय) = 1

*मैं* =1

1

या *एन.पी* = 1 अर्थात, *पी* = *एन*

होने देना एस होना ए नमूना अंतरिक्ष और इ होना एक आयोजन, ऐसा वह *एन* (एस) = *एन* और *एन* (ई) = *एम* । अगर प्रत्येक बाहर आना है समान रूप से संभावित, तब यह इस प्रकार वह

###### पी(ई) *एम* संख्या का परणाम अनुकूल को इ

कुल संभावित नतीजे

=

* + 1. *संभावना का आयोजन 'ए या बी'* होने देना हम अब खोजो संभावना का आयोजन 'ए या बी', यानी, पी (ए ∪ बी)

चलो ए = {एचएचटी, एचटीएच, THH} और बी = {एचटीएच, THH, HHH} होना दो आयोजन संबंधित साथ 'फेंकना का ए सिक्का तीन बार'

स्पष्ट रूप से ए ∪ बी = {एचएचटी, एचटीएच, THH, HHH}

अब पी (ए ∪ बी) = पी(एचएचटी) + पी(एचटीएच) + पी(टीएचएच) + पी(एचएचएच)

अगर सभी परणाम हैं समान रूप से संभावित, तब

पी ( ए ∪ बी ) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = 1

8 8 8 8 8 2

3

इसके अलावा पी(ए) = पी(एचएचटी) + पी(एचटीएच) + पी(टीएचएच) = 8

300 गणित

3

और पी(बी) = पी(एचटीएच) + पी(टीएचएच) + पी(एचएचएच) = 8

इसलिए पी(ए) + पी(बी) = 3 + 3 = 6

8 8 8

यह है स्पष्ट वह पी(ए ∪ बी) ≠ पी(ए) + पी(बी)

अंक एचटीएच और THH हैं सामान्य को दोनों ए और बी। में गणना का पी(ए) + पी(बी) संभावनाओं का अंक एचटीएच और THH, अर्थात, तत्वों का ए ∩ बी हैं

शामिल दो बार। इस प्रकार को पाना संभावना पी(ए ∪ बी) हम पास होना को घटाना संभावनाओं का नमूना अंक में ए ∩ बी से पी(ए) + पी(बी)

यानी पी(ए ∪ बी) = पी(ए) पी(बी) − ∑ पी(

*मैं ),* ∀ *ω मैं* ∈ *ए* ∩ *बी*

#### = पी( ए ) + पी(बी) − पी( ए ∩ बी)

इस प्रकार हम निरीक्षण वह, पी(ए

बी) पी(ए)

पी(बी)

पी(ए बी)

में सामान्य, यदि ए और बी हैं कोई दो आयोजन संबंधित साथ ए यादृच्छिक प्रयोग, तब द्वारा परिभाषा का संभावना का एक आयोजन, हम पास होना

पी ( ए ∪ बी ) = ∑ *पी* ( *मैं* ) *,* ∀ *ω मैं* ∈ *ए* ∪ *बी* .

चूंकि ए बी = (ए-बी) ∪ (ए ∩ बी) ∪ (बी ० ए) ,

हम पास होना

पी(ए ∪ बी) = [ ∑ पी( *ω मैं )* ∀ *ω i* ∈ *(ए-बी)* ] + [ ∑ *पी(ω मैं )* ∀ *ω मैं* ∈ *ए* ∩ *बी* ] *+* [ ∑ पी( *ω मैं )* ∀ *ω i* ∈ *बी – ए* ]

(क्योंकि ए-बी, ए ∩ बी और बी – ए हैं परस्पर अनन्य) ... (1)

भी

पी(ए) + पी(बी) = [ ∑ *पी* (

*मैं )* ∀ ω *मैं* ∈ *ए* ] *+* ∑ *पी(ω मैं )* ∀ *ω मैं* ∈ *बी* ]

= [ ∑ पी(

*मैं )* ∀ *ω i* ∈ *(ए-बी)* ∪ *(ए* ∩ *बी)* ] *+* [ ∑ पी(

*मैं )* ∀ *ω i* ∈ *(बी – ए)* ∪ *(ए* ∩ *बी)* ]

= [ ∑ पी(

[ ∑ पी(

*मैं )* ∀ *ω i* ∈ *(ए – बी)* ] *+* ∑ *पी(ω मैं )* ∀ *ω i* ∈ *(ए* ∩ *बी)* ] + [ ∑ पी(

*मैं )* ∀ *ω i* ∈ *(ए* ∩ *बी)* ]

*मैं )* ∀ *ω i* ∈ *(बी ० ए)* ] +

= पी(ए ∪ बी) + [ ∑ पी( *ω i )* ∀ *ω मैं* ∈ *ए* ∩ *बी* ]

= पी(ए ∪ बी) + पी(ए ∩ बी) .

[उपयोग करना (1)]

इस तरह पी(ए बी) = पी (ए) +पी(बी) – पी(ए ∩ बी) .

वैकल्पिक रूप से, यह कर सकना भी होना साबित जैसा इस प्रकार है:

ए ∪ बी = ए ∪ (बी – ए), कहाँ ए और बी – ए हैं परस्पर अनन्य,

और बी = (ए ∩ बी) ∪ (बी – ए), कहाँ ए ∩ बी और बी – ए हैं परस्पर अनन्य। का उपयोग करते हुए स्वयंसिद्ध (iii) का संभावना, हम पाना

संभाव्यता 301

पी (ए ∪ बी) = पी (ए) + पी (बी – ए) (2)

और पी(बी) = पी ( ए ∩ बी) + पी (बी – ए) (3)

घटाने (3) से (2) देता है

पी (ए ∪ बी) – पी(बी) = पी(ए) – पी (ए ∩ बी)

या पी(ए ∪ बी) = पी(ए) + पी (बी) – पी (ए ∩ बी)

ऊपर परिणाम कर सकना आगे होना सत्यापित द्वारा अवलोकन वेन आरेख (अंजीर 14.1)



अंजीर 14.1

अगर ए और बी हैं विभिन्न करना सेट, अर्थात, वे हैं परस्पर अनन्य आयोजन, तब ए ∩ बी = φ

इसलिए पी(ए ∩ बी) = पी ( φ ) = 0

इस प्रकार, के लिए परस्पर अनन्य आयोजन ए और बी, हम पास होना

पी(ए

बी) पी(ए)

पी(बी) ,

कौन है स्वयंसिद्ध (iii) का संभावना।

* + 1. ' *ए नहीं* ' *की संभावना* संबंधित घटना A = {2, 4, 6, 8} पर विचार करें साथ प्रयोग का चित्रकला ए कार्ड से ए जहाज़ की छत का दस पत्ते गिने से 1 को 10. स्पष्ट रूप से नमूना अंतरिक्ष है एस = {1, 2, 3, ...,10}

अगर सभी परणाम 1, 2, ...,10 हैं माना को होना समान रूप से संभावित, तब संभावना

1

का प्रत्येक नतीजा है 10

अब पी(ए) = पी(2) + पी(4) + पी(6) + पी(8)

= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 = 2

10 10 10 10 10 10 5

भी आयोजन 'नहीं ए' = ए = {1, 3, 5, 7, 9, 10}

अब पी(ए ' ) = पी(1) + पी(3) + पी(5) + पी(7) + पी(9) + पी(10)

302 गणित

6 3

= 10 5

इस प्रकार, पी(ए ' ) = 3 = 1 - 2 = 1 - पी(ए)

5 5

भी, हम जानना वह ए ' और ए हैं परस्पर अनन्य और संपूर्ण आयोजन अर्थात,

ए ∩ ए ' = φ और ए ∪ ए ' = एस

या पी(ए ∪ ए ' ) = पी(एस)

अब पी(ए) + पी(ए ' ) = 1, द्वारा का उपयोग करते हुए अभिगृहीत (ii) और (iii). या पी( ए ' ) = पी(ए नहीं) = 1 – पी(ए)

हम अब विचार करना कुछ उदाहरण और अभ्यास होना समान रूप से संभावित परणाम

जब तक कहा गया अन्यथा।

उदाहरण 5 एक कार्ड है अनिर्णित से ए कुंआ फेरबदल जहाज़ की छत का 52 पत्ते। अगर प्रत्येक नतीजा है समान रूप से संभावित, calculate संभावना वह कार्ड इच्छा होना

1. ए हीरा (ii) नहीं एक ऐस

(iii) ए काला कार्ड (अर्थात, ए क्लब या, ए कुदाल) (iv) नहीं ए डायमंड

(v) नहीं ए काला कार्ड.

हल जब 52 ताशों की अच्छी तरह से फेंटी गई गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है, तो उसकी संख्या होती है संभव परणाम है 52.

1. होने देना ए होना आयोजन 'द कार्ड अनिर्णित है ए हीरा' स्पष्ट रूप से संख्या का तत्वों में तय करना ए है 13.

13 1

इसलिए, पी(ए) =

52 4

1

अर्थात संभावना का ए डायमंड कार्ड =

4

1. हम मान लीजिए वह आयोजन 'कार्ड अनिर्णित है एक इक्का' है बी इसलिए 'कार्ड अनिर्णित है नहीं एक इक्का' चाहिए होना बी ' ।

हम जानना वह पी(बी ' ) = 1 – पी(बी) = 1 -

4 =1 − 1 = 12

52 13 13

1. होने देना सी निरूपित आयोजन 'कार्ड अनिर्णित है काला कार्ड' इसलिए, संख्या का तत्वों में तय करना सी = 26

यानी पी(सी) =

#### 26 = 1

52 2

संभाव्यता 303

###### 1

इस प्रकार, संभावना का ए काला कार्ड = 2 .

1. हमने उपरोक्त (i) में मान लिया है कि A घटना है 'निकाला गया कार्ड एक हीरा है', इसलिए आयोजन 'कार्ड अनिर्णित है नहीं ए हीरा' मई होना लक्षित जैसा ए' या 'नहीं ए'

अब पी(नहीं ए) = 1 – पी(ए) = 1 - 1 = 3

4 4

1. आयोजन 'कार्ड अनिर्णित है नहीं ए काला कार्ड' मई होना लक्षित जैसा सी ' या 'नहीं सी'।

हम जानना वह पी(नहीं सी) = 1 – पी(सी) = 1 - 1 = 1

#### 2 2

###### 1

इसलिए, संभावना का नहीं ए काला कार्ड = 2

उदाहरण 6 ए थैला रोकना 9 डिस्क का कौन 4 हैं लाल, 3 हैं नीला और 2 हैं पीला। डिस्क हैं समान में आकार और आकार। ए डिस्क है अनिर्णित पर यादृच्छिक से थैला। गणना संभावना वह यह इच्छा होना (मैं) लाल, (ii) पीला, (iii) नीला, (iv) नहीं नीला,

1. या तो लाल या नीला.

समाधान वहाँ हैं 9 डिस्क सभी में इतना कुल गणना संभव का परिणाम है 9. होने देना आयोजन ए, बी, सी होना परिभाषित जैसा

ए: 'द डिस्क अनिर्णित है लाल'

बी: 'द डिस्क अनिर्णित है पीला' सी: 'द डिस्क अनिर्णित है नीला'।

* 1. संख्या का लाल डिस्क = 4, अर्थात, *एन* (ए) = 4

4

इसलिए पी(ए) = 9

* 1. संख्या का पीली डिस्क = 2, अर्थात, *एन* (बी) = 2

2

इसलिए, पी(बी) = 9

* 1. संख्या का नीला डिस्क = 3, अर्थात, *एन* (सी) = 3

इसलिए, पी(सी) =

3 = 1

9 3

* 1. स्पष्ट रूप से आयोजन 'नहीं नीला' है 'नहीं सी'। हम जानना वह पी(नहीं सी) = 1 – पी(सी)

304 गणित

इसलिए पी(नहीं सी) = 1 - 1 = 2

3 3

* 1. आयोजन 'दोनों में से एक लाल या नीला' मई होना बताया गया है द्वारा तय करना 'ए या सी' तब से, ए और सी परस्पर हैं अनन्य आयोजन, हम पास होना

पी(ए या सी) = पी (ए ∪ सी) = पी(ए) + पी(सी) =

4 + 1 = 7

9 3 9

उदाहरण 7 दो छात्र Anil और आशिमा दिखाई दिया में एक इंतिहान। संभावना वह Anil इच्छा अर्हता इंतिहान है 0.05 और वह आशिमा इच्छा अर्हता इंतिहान 0.10 है. दोनों के परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.02 है। खोजें संभावना वह

* + 1. दोनों Anil और आशिमा इच्छा नहीं अर्हता इंतिहान।
    2. कम से कम एक का उन्हें इच्छा नहीं अर्हता इंतिहान और
    3. केवल एक का उन्हें इच्छा अर्हता इंतिहान।

समाधान होने देना इ और एफ निरूपित आयोजन वह Anil और आशिमा इच्छा अर्हता इंतिहान, क्रमश। दिया गया वह

पी.ई) = 0.05, पी(एफ) = 0.10 और पी.ई ∩ एफ) = 0.02.

तब

1. आयोजन 'दोनों Anil और आशिमा इच्छा नहीं अर्हता इंतिहान' मई होना व्यक्त जैसा इ \_ ∩ एफ । \_

तब से, इ \_ है 'नहीं इ', अर्थात, Anil इच्छा नहीं अर्हता इंतिहान और एफ \_ है 'नहीं एफ', अर्थात, आशिमा इच्छा नहीं अर्हता इंतिहान।

साथ ही ई ´ ∩ एफ \_ = (इ ∪ एफ \_ (द्वारा डेमोर्गन का कानून) अब पी(ई ∪ एफ) = पी.ई) + पी(एफ) – पी.ई ∩ एफ)

या पी(ई ∪ एफ)= 0.05+ 0.10 – 0.02 = 0.13

इसलिए पी.ई \_ ∩ एफ ) \_ = पी.ई ∪ एफ \_ = 1 – पी.ई ∪ एफ) = 1 – 0.13 = 0.87

1. पी (कम से कम एक का उन्हें इच्छा नहीं अर्हता प्राप्त)

= 1 – पी(दोनों का उन्हें इच्छा अर्हता प्राप्त)

= 1 – 0.02 = 0.98

1. आयोजन केवल एक का उन्हें इच्छा अर्हता इंतिहान है वही जैसा आयोजन दोनों में से एक (Anil इच्छा योग्य, और आशिमा इच्छा नहीं अर्हता प्राप्त) या (Anil इच्छा नहीं अर्हता और आशिमा

संभाव्यता 305

अर्हता प्राप्त होगी) अर्थात, E ∩ F ´ या E ´ ∩ F, जहां E ∩ F´ और E´ ∩ F परस्पर अनन्य हैं। इसलिए, पी(केवल एक का उन्हें इच्छा अर्हता प्राप्त) = पी(ई ∩ एफ \_ या इ \_ ∩ एफ)

= पी.ई ∩ एफ ) \_ + पी.ई \_ ∩ एफ) = पी (इ) – पी.ई ∩ एफ) + पी(एफ) – पी (इ ∩ एफ)

= 0.05 – 0.02 + 0.10 – 0.02 = 0.11

उदाहरण 8 दो पुरुषों और दो महिलाओं में से दो व्यक्तियों की एक समिति का चयन किया जाता है। क्या है संभावना वह समिति इच्छा पास होना (ए) नहीं आदमी? (बी) एक आदमी? (सी) दो पुरुष?

समाधान कुल संख्या का व्यक्तियों = 2 + 2 = 4. बाहर का इन चार व्यक्ति, दो कर सकना

होना चयनित में 4 सी 2

तौर तरीकों।

1. नहीं पुरुषों में समिति का दो मतलब वहाँ इच्छा होना दो औरत में समिति। बाहर का दो औरत, दो कर सकना होना चयनित में 2 सी 2 = 1 रास्ता।

2 सी 1× 2 ×1 1

इसलिए

पी ( नहीं) आदमी )

2 == \_

4  4 × 3 6

C

2

1. समिति में एक पुरुष यानी एक महिला है. 2 में से एक आदमी 2 में चयन किया जा सकता है सी 1 तरीके और 2 में से एक महिला को 2 में चुना जा सकता है सी 1 तौर तरीकों। एक साथ वे कर सकना होना चयनित में 2 सी 1 × 2 सी 1 तौर तरीकों।

इसलिए

पी ( एक आदमी )

2 सी 1 × 2 सी 1

4 सी 2

= 2 × 2 = 2

2 × 3 3

1. दो पुरुषों कर सकना होना चयनित में 2 सी 2 रास्ता।

2 सी 2 1 1

इस तरह

पी ( दो पुरुष ) === \_ \_

सी 2 4 2 6

4

C

1. कौन का अगले कर सकना नहीं होना वैध कार्यभार का संभावनाओं के लिए परणाम का नमूना अंतरिक्ष एस = { 1 , ω 2 , ω 3 , ω 4 , ω 5 , ω 6 , ω 7

EXERCISE 14.2

306 गणित

असाइनमेंट ω 1 2 3 4 5 ω 6 7

(ए) 0.1 0.01 0.05 0.03 0.01 0.2 0.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 |
| 7 |  | 7 |  | 7 |  | 7 | 7 |  | 7 |  | 7 |
| 0.1 |  | 0.2 |  | 0.3 |  | 0.4 | 0.5 |  | 0.6 |  | 0.7 |
| – 0.1 |  | 0.2 |  | 0.3 |  | 0.4 | – 0.2 |  | 0.1 |  | 0.3 |
| 1 |  | 2 |  | 3 |  | 4 | 5 |  | 6 |  | 15 |
| 14 |  | 14 |  | 14 |  | 14 | 14 |  | 14 |  | 14 |

(बी)

(सी)

1. ए सिक्का है फेंक दिया दो बार, क्या है संभावना वह कम से कम एक पूँछ घटित होना?
2. ए मरना है फेंक दिया, खोजो संभावना का अगले आयोजन:
   1. ए मुख्य संख्या इच्छा के जैसा लगना,
   2. ए संख्या ग्रेटर बजाय या बराबर को 3 इच्छा के जैसा लगना,
   3. ए संख्या कम बजाय या बराबर को एक इच्छा के जैसा लगना,
   4. ए संख्या अधिक बजाय 6 इच्छा के जैसा लगना,
   5. ए संख्या कम बजाय 6 इच्छा के जैसा लगना।
3. ए कार्ड है चयनित से ए सामान बाँधना का 52 पत्ते।
4. कैसे अनेक अंक हैं वहाँ में नमूना अंतरिक्ष?
5. गणना संभावना वह कार्ड एक ऐस हुकुम का.
6. गणना संभावना वह कार्ड है (मैं) एक ऐस (ii) काला कार्ड.
7. ए गोरा सिक्का साथ 1 चिह्नित पर एक चेहरा और 6 पर अन्य और ए गोरा मरना हैं दोनों फेंक दिया. खोजो संभावना वह जोड़ का नंबर वह मोड़ ऊपर है (मैं) 3 (ii) 12
8. वहाँ हैं चार पुरुषों और छह औरत पर शहर परिषद। अगर एक परिषद सदस्य है चयनित के लिए ए समिति पर यादृच्छिक, कैसे संभावित है यह वह यह है ए महिला?
9. ए गोरा सिक्का है फेंक दिया चार समय, और ए व्यक्ति जीतना दोबारा 1 के लिए प्रत्येक सिर और खोना रुपये 1.50 के लिए प्रत्येक पूँछ वह मोड़ों ऊपर।

से नमूना अंतरिक्ष calculate कैसे अनेक अलग मात्रा का धन आप कर सकना के बाद है चार उछालों और संभावना होने का इनमें से प्रत्येक रकम.

1. तीन सिक्के हैं फेंक दिया एक बार। खोजो संभावना का उपार्जन

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (मैं) | 3 सिर | (ii) | 2 सिर | (iii) | कम से कम 2 सिर |
| (iv) | अधिक से अधिक 2 सिर | (वी) | सिर नहीं | (vi) | 3 पूंछ |
| (vii) | बिल्कुल दो पूंछ | (viii) | नहीं पूँछ | (ix) | अधिक से अधिक दो पूंछ |

2

1. अगर 11 है संभावना का एक आयोजन, क्या है संभावना का आयोजन 'नहीं ए'।
2. ए पत्र है चुना पर यादृच्छिक से शब्द 'हत्या'. खोजो संभावना वह पत्र है (मैं) ए स्वर (ii) ए व्यंजन

संभाव्यता 307

1. में ए लॉटरी, ए व्यक्ति चुनता है छह अलग प्राकृतिक नंबर पर यादृच्छिक से 1 को 20, और अगर इन छह नंबर मिलान साथ छह नंबर पहले से तय द्वारा लॉटरी समिति, वह जीत पुरस्कार। क्या है संभावना का जीत पुरस्कार में खेल? [ संकेत देना आदेश के नंबर है नहीं महत्वपूर्ण।]
2. जाँच करना चाहे अगले संभावनाओं पी(ए) और पी(बी) हैं लगातार परिभाषित (i) पी(ए) = 0.5, पी(बी) = 0.7, पी(ए ∩ बी) = 0.6

(ii) पी(ए) = 0.5, पी(बी) = 0.4, पी(ए ∪ बी) = 0.8

1. भरना में कारतूस में अगले मेज़:

पी(ए) पी(बी) पी(ए ∩ बी) पी(ए) ∪ बी)

11 \_

(i) 3 5

1

15 . . .

(ii) 0.35 . . . 0.25 0.6

(iii) 0.5 0.35 । . . 0.7

3

1. दिया गया पी(ए) = 5

आयोजन।

1

और पी(बी) = 5 . खोजो पी(ए या बी), अगर ए और बी हैं परस्पर अनन्य

1 1 1

1. अगर इ और एफ हैं आयोजन ऐसा वह पी.ई) = 4 , पी(एफ) = 2 और पी.ई और एफ) = 8 , खोजो
   1. पी.ई या एफ), (ii) पी(नहीं ई और नहीं एफ)।
2. आयोजन इ और एफ हैं ऐसा वह पी(नहीं इ या नहीं एफ) = 0.25, राज्य चाहे इ और एफ हैं परस्पर अनन्य।
3. A और B ऐसी घटनाएँ हैं जिनमें P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 और P(A और B) = 0.16 हैं। निर्धारित करें (i) पी(नहीं ए), (ii) पी(नहीं बी) और (iii) पी(ए या बी)
4. एक स्कूल की ग्यारहवीं कक्षा में 40% छात्र गणित पढ़ते हैं और 30% छात्र पढ़ते हैं जीवविज्ञान। कक्षा के 10% लोग गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यदि कोई विद्यार्थी है कक्षा से यादृच्छिक रूप से चुने गए व्यक्ति की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह अध्ययन कर रहा होगा अंक शास्त्र या जीवविज्ञान।
5. में एक प्रवेश द्वार परीक्षा वह है ग्रेड दिया गया पर आधार का दो परीक्षाएँ, संभावना का ए बेतरतीब चुना विद्यार्थी पासिंग पहला इंतिहान है 0.8 और संभावना का पासिंग दूसरा इंतिहान है 0.7. संभावना का पासिंग कम से कम एक का उन्हें है 0.95. क्या है संभावना का पासिंग दोनों?
6. संभावना वह ए विद्यार्थी इच्छा उत्तीर्ण अंतिम इंतिहान में दोनों अंग्रेज़ी और हिंदी 0.5 है और दोनों में से किसी के उत्तीर्ण होने की संभावना 0.1 है। यदि की संभावना अंग्रेजी परीक्षा उत्तीर्ण करने की संभावना 0.75 है, उत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्या है? हिंदी इंतिहान?

308 गणित

1. में ए कक्षा का 60 छात्र, 30 का विकल्प चुना एनसीसी, 32 विकल्प चुना के लिए एनएसएस और 24 विकल्प चुना के लिए एनसीसी और एनएसएस दोनों। यदि इनमें से एक छात्र को यादृच्छिक रूप से चुना जाता है, तो ज्ञात करें संभावना वह
   1. विद्यार्थी विकल्प चुना के लिए एनसीसी या एनएसएस.
   2. विद्यार्थी है विकल्प चुना कोई भी नहीं एनसीसी और न एनएसएस.
   3. विद्यार्थी है विकल्प चुना एनएसएस लेकिन नहीं एन.सी.सी.

*मिश्रित उदाहरण*

उदाहरण 9 चालू अपनी छुट्टियों में वीना यादृच्छिक रूप से चार शहरों (ए, बी, सी और डी) का दौरा करती है आदेश देना। क्या है संभावना वह वह दौरा

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (मैं एक पहले बी? | (ii) | ए पहले बी और बी पहले सी? |
| (iii) A पहले और B आखिरी? | (iv) | ए या तो पहला या दूसरा? |
| (v) ए अभी पहले बी? |  |  |

समाधान संख्या का व्यवस्था (आदेश) में कौन वीना कर सकना मिलने जाना चार शहरों ए, बी, सी, या डी है 4! अर्थात, 24.इसलिए, *एन* (एस) = 24.

तब से संख्या का तत्वों में नमूना अंतरिक्ष का प्रयोग है 24 सभी का इन परणाम हैं माना को होना समान रूप से संभावित। ए नमूना अंतरिक्ष के लिए प्रयोग है

एस = {एबीसीडी, एबीडीसी, एसीबीडी, एसीडीबी, एडीबीसी, एडीसीबी बीएसीडी, बीएडीसी, बीडीएसी, बीडीसीए, बीसीएडी, बीसीडीए सीएबीडी, सीएडीबी, सीबीडीए, सीबीडीए, सीडीएबी, सीडीबीए डीएबीसी, डीएसीबी, डीबीसीए, डीबीएसी, डीसीएबी, डीसीबीए}

1. होने देना आयोजन 'वह दौरा ए पहले बी' होना लक्षित द्वारा इ

इसलिए, इ = {ए बी सी डी, सीबीडी, डीएबीसी, एबीडीसी, सीएडीबी, डीएसीबी एसीबीडी, एसीडीबी, एडीबीसी, सीडीएबी, डीसीएबी, एडीसीबी}

*एन* ( ई ) 12 1

आप

= =

पी.ई ) \_ \_

*एन* ( एस ) 24 2

1. होने देना आयोजन 'वीणा दौरा ए पहले बी और बी पहले सी' होना लक्षित द्वारा एफ। यहां एफ = {ए बी सी डी, डीएबीसी, एबीडीसी, एडीबीसी}

*एन* ( एफ ) 4 1

इसलिए, पी ( एफ )

= =

*एन* ( एस ) 24 6

छात्र हैं सलाह दी को खोजो संभावना में मामला का (iii), (iv) और (वी).

संभाव्यता 309

उदाहरण 10 खोजो संभावना वह कब ए हाथ का 7 पत्ते है अनिर्णित से ए कुंआ फेरबदल जहाज़ की छत का 52 पत्ते, यह रोकना (मैं) सभी किंग्स (ii) 3 किंग्स (iii) कम से कम 3 राजाओं.

समाधान कुल संख्या का संभव हाथ = 52 सी 7

* 1. संख्या का हाथ साथ 4 किंग्स = 4 सी 4 × 48 सी 3 (अन्य 3 पत्ते अवश्य होना चुना से आराम 48 पत्ते)

इसलिए पी (ए हाथ इच्छा पास होना 4 राजा) =

4 सी 4 × 48 सी 3 =

52 सी 7

1

7735

* 1. संख्या का हाथ साथ 3 किंग्स और 4 गैर राजा पत्ते = 4 सी 3 × 48 सी 4

इसलिए प (3 राजा) =

4 सी 3 × 48 सी 4 =

52 सी 7

9

1547

* 1. पी(कम से कम 3 राजा) = पी(3 किंग्स या 4 राजा)

= पी(3 राजा) + पी(4 राजा)

= 9 + 1 = 46

1547 7735 7735

उदाहरण 11 अगर ए, बी, सी हैं तीन आयोजन संबंधित साथ ए यादृच्छिक प्रयोग, सिद्ध करना वह

पी ( ए ∪ बी ∪ सी ) = पी ( ए ) + पी ( बी ) +पी ( सी ) − पी ( ए ∩ बी ) − पी ( ए ∩ सी )

– पी ( बी ∩ सी) + पी ( ए ∩ बी ∩ सी)

समाधान विचार करना इ = बी ∪ सी इसलिए वह पी (ए ∪ बी ∪ सी ) = पी (ए ∪ इ )

अब

=

पी.ई ) \_ \_ = पी ( बी ∪ सी )

पी ( ए ) + पी.ई ) \_ \_ − पी ( ए ∩ इ )

... (1)

= पी ( बी ) + पी ( सी ) − पी ( बी ∩ सी )

... (2)

भी

ए ∩ इ = ए ∩ ( बी ∪ सी )

= ( ए ∩ बी ) ∪ ( ए ∩ सी ) [उपयोग करना वितरण संपत्ति का

चौराहा का सेट ऊपर संघ]. इस प्रकार

पी ( ए ∩ इ ) = पी ( ए ∩ बी ) + पी ( ए ∩ सी ) –

पी   ( ए ∩ बी ) ∩ ( ए ∩ सी )  

310 गणित

= पी ( ए ∩ बी ) + पी ( ए ∩ सी ) – पी ए ∩ बी ∩ सी ]

... (3)

का उपयोग करते हुए (2) और (3) पहले में), हम पाना

पी [ ए ∪ बी ∪ सी ] = पी ( ए ) + पी ( बी ) + पी ( सी ) − पी ( बी ∩ सी )

– पी ( ए ∩ बी ) − पी ( ए ∩ सी ) + पी ( ए ∩ बी ∩ सी )

उदाहरण 12 में ए रिले दौड़ वहाँ हैं पाँच टीमें ए, बी, सी, डी और इ।

1. क्या है संभावना वह ए, बी और सी खत्म करना पहला, दूसरा और तीसरा, क्रमश।
2. क्या है संभावना वह ए, बी और सी हैं पहला तीन को खत्म करना (में कोई आदेश देना) (मान लीजिए वह सभी परिष्करण आदेश हैं समान रूप से संभावित)

समाधान अगर हम विचार करना नमूना अंतरिक्ष मिलकर का सभी परिष्करण आदेश में पहला

तीन स्थानों, हम इच्छा पास होना 5 पी 3 , अर्थात,

5!

( 5 − 3 ) !

= 5 × 4 × 3 = 60 नमूना अंक, प्रत्येक साथ

1

ए संभावना का 60 .

1. ए, बी और सी खत्म करना पहला, दूसरा और तीसरा, क्रमश। वहाँ है केवल एक परिष्करण आदेश के लिए यह, अर्थात, एबीसी.

इस प्रकार पी(ए, बी और सी खत्म करना पहला, दूसरा और तीसरा क्रमश) =

1

60 .

1. A, B और C पहले तीन फिनिशर हैं। 3 होंगे! ए, बी की व्यवस्था और सी। इसलिए, नमूना अंक संगत को यह आयोजन इच्छा होना 3! में संख्या।

तो पी (ए, बी और सी हैं पहला तीन को समाप्त) 3! = 6 = 1

60 60 10

##### मिश्रित व्यायाम पर अध्याय 14

1. ए डिब्बा रोकना 10 लाल पत्थर, 20 नीला पत्थर और 30 हरा पत्थर. 5 पत्थर हैं अनिर्णित से डिब्बा, क्या है संभावना वह
   1. सभी इच्छा होना नीला? (ii) कम से कम एक इच्छा होना हरा?
2. 4 पत्ते हैं अनिर्णित से ए कुंआ – फेरबदल जहाज़ की छत का 52 पत्ते। क्या है संभावना का प्राप्त 3 हीरे और एक कुदाल?

संभाव्यता 311

1. ए मरना है दो चेहरे के प्रत्येक साथ संख्या '1', तीन चेहरे के प्रत्येक साथ संख्या '2' और एक चेहरा साथ संख्या '3'. अगर मरना है लुढ़का एक बार, ठानना
   1. पी(2) (ii) पी(1 या 3) (iii) पी(नहीं 3)
2. एक निश्चित लॉटरी में 10,000 टिकट बेचे जाते हैं और दस बराबर पुरस्कार दिए जाते हैं। यदि आप (ए) एक टिकट खरीदते हैं तो पुरस्कार न मिलने की क्या संभावना है? (बी) दो टिकट (सी) 10 टिकट.
3. बाहर का 100 छात्र, दो धारा का 40 और 60 हैं बनाया। अगर आप और आपका दोस्त हैं के बीच 100 छात्र, क्या है संभावना वह
4. आप दोनों प्रवेश करना वही अनुभाग?
5. आप दोनों प्रवेश करना विभिन्न अनुभाग?
6. तीन पत्र तीन व्यक्तियों को लिखे जाते हैं और प्रत्येक को एक लिफाफा दिया जाता है का उन्हें, पत्र हैं डाला में लिफाफे पर यादृच्छिक इसलिए वह प्रत्येक लिफ़ाफ़ा इसमें बिल्कुल एक अक्षर है. प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इसमें कम से कम एक अक्षर है उचित लिफ़ाफ़ा।
7. ए और बी दो घटनाएँ हैं जैसे कि पी(ए) = 0.54, पी(बी) = 0.69 और पी(ए ∩ बी) = 0.35। खोजो (मैं) पी(ए ∪ बी) (ii) पी(ए ´ ∩ बी ) \_ (iii) पी(ए ∩ बी ) \_ (iv) पी(बी ∩ ए ) \_
8. एक कंपनी के कर्मचारियों में से 5 व्यक्तियों को उनका प्रतिनिधित्व करने के लिए चुना जाता है प्रबंध समिति का कंपनी। विवरण का पाँच व्यक्तियों हैं जैसा इस प्रकार है:

एस। सं. नाम लिंग आयु में साल

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. हरीश | एम | 30 |
| 2. रोहन | एम | 33 |
| 3. शीतल | एफ | 46 |
| 4. ऐलिस | एफ | 28 |
| 5. सलीम | एम | 41 |

ए व्यक्ति है चयनित पर यादृच्छिक से यह समूह को कार्य जैसा ए प्रवक्ता. क्या है संभावना वह प्रवक्ता इच्छा होना दोनों में से एक पुरुष या ऊपर 35 साल?

1. अगर 4 अंक नंबर ग्रेटर बजाय 5,000 हैं बेतरतीब बनाया से अंक 0, 1, 3, 5, और 7, क्या है संभावना का गठन ए संख्या भाज्य द्वारा 5 कब,
   1. अंक हैं दोहराया गया? (ii) दुहराव का अंक है नहीं अनुमत?
2. एक सूटकेस के नंबर लॉक में 4 पहिये होते हैं, प्रत्येक पर दस अंक अंकित होते हैं, अर्थात, से 0 को 9. ताला खुलती साथ ए अनुक्रम का चार अंक साथ नहीं दोहराता है. क्या है संभावना का ए व्यक्ति उपार्जन सही अनुक्रम को खुला सूटकेस?

312 गणित

*सारांश*

में यह अध्याय, हम अध्ययन के बारे में सिद्ध दृष्टिकोण का संभावना। मुख्य विशेषताएँ का यह अध्याय हैं जैसा इस प्रकार है:

� घटना : उपसमुच्चय का नमूना अंतरिक्ष

असंभव *आयोजन* : खाली तय करना

� ज़रूर *आयोजन* : साबुत नमूना अंतरिक्ष

-पूरक *आयोजन या 'नहीं आयोजन'* : तय करना ए ' या एस - ए

� घटनाए *या* बी: तय करना ए ∪ बी

� घटनाए *और* बी: तय करना ए ∩ बी

� घटनाए *और* नहीं बी: तय करना ए – बी

� परस्पर *अनन्य आयोजन* : ए और बी हैं परस्पर अनन्य अगर ए ∩ बी = φ

� संपूर्ण *और परस्पर अनन्य आयोजन* : आयोजन ई 1 , ई 2 ,..., ई *एन* हैं परस्पर अनन्य और संपूर्ण अगर ई 1 ∪ ई 2 ∪ ... ∪ ई *एन* = एस और ई *मैं* ∩ ई *जे* = φ ~~वी~~ *मैं* ≠ *जे*

� संभावना : संख्या पी ( ω *मैं* ) संबंधित साथ नमूना बिंदु *I* ऐसा वह

(मैं) 0 ≤ पी ( ω *मैं* ) ≤ 1 (ii)

∑ पी ( *ω i* ) के लिए सभी ω *मैं* ∈ एस = 1

(iii) पी(ए) = ∑ पी ( *ω i* ) के लिए सभी ω *मैं* ∈ ए. संख्या पी ( ω *मैं* ) है बुलाया *संभावना का नतीजा* ω *मैं .*

- समान रूप से *संभावित परिणाम* : सभी परणाम साथ बराबर संभावना

-संभावना *का एक आयोजन* : के लिए ए परिमित नमूना अंतरिक्ष साथ समान रूप से संभावित परणाम

संभावना का एक आयोजन पी(ए) = *एन* (ए) , कहाँ *एन* (ए) = संख्या का तत्वों में

*एन* (एस)

तय करना ए, *एन* (एस) = संख्या का तत्वों में तय करना एस।

� अगर ए और बी हैं कोई दो आयोजन, तब

पी(ए या बी) = पी(ए) + पी(बी) – पी(ए और बी)

समान रूप से, पी(ए ∪ बी) = पी(ए) + पी(बी) – पी(ए ∩ बी)

� अगर ए और बी हैं परस्पर अनन्य, तब पी(ए या बी) = पी(ए) + पी(बी)

� अगर ए है कोई आयोजन, तब

पी(नहीं ए) = 1 – पी(ए)

संभाव्यता 313

*ऐतिहासिक टिप्पणी*

संभावना लिखित पसंद अनेक अन्य शाखाओं का अंक शास्त्र, विकसित बाहर का व्यावहारिक विचार. इसकी उत्पत्ति 16वीं शताब्दी में हुई जब एक इतालवी चिकित्सक और गणितज्ञ जेरोम कार्डन (1501-1576) ने पहली पुस्तक लिखी इस विषय पर "बुक ऑन गेम्स ऑफ चांस" (बीबर डी लूडो एले)। वह था प्रकाशित में 1663 बाद उसका मौत।

में 1654, ए जुआरी राजपूत डे मीटर संपर्क किया कुंआ ज्ञात फ़्रेंच कुछ पासों के लिए दार्शनिक और गणितज्ञ ब्लेज़ पास्कल (1623-1662) संकट। पास्कल बन गया इच्छुक में इन समस्या और चर्चा की साथ प्रसिद्ध फ्रांसीसी गणितज्ञ पियरे डी फ़र्मेट (1601-1665)। पास्कल और फ़र्मेट दोनों समस्या को स्वतंत्र रूप से हल किया। इसके अलावा, पास्कल और फ़र्मेट, उत्कृष्ट योगदान को संभावना लिखित थे भी बनाया द्वारा ईसाई ह्यूजीनेस (1629- 1665), एक डचमैन, जे. बर्नौली (1654-1705), डी मोइवरे (1667-1754), एक फ्रांसीसी पियरे लाप्लास (1749-1827), रूसी पीएल चेबीशेव (1821- 1897), ए. ए मार्कोव (1856-1922) और ए. एन कोलमोगोरोव (1903-1987)। कोलमोगोरोव को संभाव्यता के स्वयंसिद्ध सिद्धांत का श्रेय दिया जाता है। उस्की पुस्तक 1933 में प्रकाशित 'फ़ाउंडेशन ऑफ़ प्रॉबेबिलिटी' संभाव्यता को एक सेट के रूप में पेश करती है समारोह और है माना ए क्लासिक.

— **�** —